# Table des matières



# Chapitre 22 : Variables Aléatoires Réelles

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

## I Généralités sur les variables aléatoires réelles finies

### *Définition et notations*

**Définition 1.** On appelle variable aléatoire réelle finie sur $\Omega$, notée varf, toute application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

**Exemple 1.** Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, donner l'univers $\Omega$ et un exemple de varf sur $\Omega$.

1. On lance une pièce de monnaie deux fois de suite, et à chaque lancer on gagne un euro si on obtient pile, on perd 2 euros si on obtient face.

$$G \left| \begin{array}{ccc} [\![P, F]\!] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & 1 \\ F & \mapsto & -2 \end{array} \right.$$

2. On lance deux dés non truqués de couleurs différentes.

$$S \left| \begin{array}{ccc} [\![1, 6]\!]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (i, j) & \mapsto & i + j \end{array} \right.$$

**Définition 2.** On appelle univers image d'une varf, noté $X(\Omega)$ l'ensemble des images de l'application $\Omega$.

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\}.$$

**Exemple 2.** Donner les univers images pour les 2 exemples précédents.

**Remarque.** En BCPST1, on ne travaille que sur des univers $\Omega$ finis.

**Notations** : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note :

- $[X = a] = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = a\}$
- $[X \leq a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq a\}$
- $[X \geq a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geq a\}$
- $[X < a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < a\}$
- $[X > a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > a\}$

Soit $A \subset \Omega$ on note :

- $[X \in A] = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}$

Comme ce sont des événements, on peut calculer leur probabilité.

**Exemple 3.** On reprend le deuxième exemple. Calculer $P([Y = 5])$, $P([Y \geq 10])$, $P([1 \leq Y < 5])$, $P([Y > 12])$.

**Exercice 1.** Soit $X$ une varf et $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $P([X \leq a])$ en fonction de $P([X \geq a])$.

**Proposition 1.** Système complet d'évènements associé à une varf

- Si $X$ est une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors $\bigcup_{i=1}^{n} [X = x_i]$ est un sce.
- En particulier, on a
$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P([X = a])$$

**Exemple 4.** Donner le sce associé dans les exemples du début.

## *I. 1 Loi d'une variable aléatoire réelle finie*

**Définition 3.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On appelle loi de probabilité de $X$ notée $f_X$ l'application

$$f_X \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & P([X = x]) \end{array} \right.$$

Déterminer la loi de probabilité de $X$ :

- Donner l'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.
- Pour chaque élément $x$ de $X(\Omega)$, calculer sa probabilité $P(X = x)$ :

$$\text{Calculs de } \; P(X = x_1),\; P(X = x_2),\; P(X = x_3),\; \ldots,\; P(X = x_n).$$

**Exemple 5.** Donner les lois des varf des exemples du début.

Deux représentations sont utilisées pour définir la loi d'une var :

- **Sous la forme d'un tableau**
- **Sous la forme d'un diagramme en bâtons**

**Exemple 6.** Donner les deux représentations graphiques possibles pour les exemples du début.

## *I. 2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle finie*

**Définition 4.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de $X$ notée $F_X$ l'application

$$F_X \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P([X \leq x]) \end{array} \right.$$

**Exemple 7.** Calculer la fonction de répartition $F_X$ pour les 2 exemples du début. Faire de plus à chaque fois la représentation graphique de $F_X$.

fonction_repartition.png

**Proposition 2.** Soit $X$ une variable aléatoire et $F_X$ sa fonction de répartition alors :

1. $F$ est croissante.
2. $F$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

De plus on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{z \leq x, z \in X(\Omega)} P(X = z)$$

**Lien entre la fonction de répartition et la loi** D'après la propriété ci-dessus, on remarque que si l'on connaît la loi de $X$, on peut calculer la fonction de répartition de $X$. Mais la réciproque est vraie aussi. Si on connaît la fonction de répartition de $X$, on peut en déduire la loi de $X$. Cela peut être utile lorsqu'il est plus facile de déterminer la fonction de répartition que la loi.

**Proposition 3.** Soit $X$ une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Alors on a :

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

*Démonstration.* □

**Exercice 2.** Un joueur prélève successivement et avec remise $n$ boules dans une urne contenant $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On considère les varf $X$ et $Y$ égales respectivement au plus grand et au plus petit numéro des $n$ boules tirées. Donner les univers images de $X$ et de $Y$. Calculer la fonction de répartition de $X$. En déduire la loi de $X$. Calculer ensuite pour tout $k \in Y(\Omega)$ : $P([Y > k])$. En déduire la loi de $Y$.

Penser à passer par la fonction de répartition pour obtenir la loi de var définie avec des min ou des max.

## I. 3 Composée d'une variable aléatoire réelle finie : $Y = g(X)$

Si $X$ est une variable aléatoire finie et $g$ une fonction numérique dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$, on peut étudier la variable aléatoire $Y = g(X)$.

Méthode pour étudier les var de type $Y = g(X)$ :

- Calcul de l'univers image $Y(\Omega)$ : Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ alors $Y(\Omega)$ s'obtient en calculant $g(x_1), g(x_2), g(x_3), \dots, g(x_n)$.
- Calcul de la loi de $Y = g(X)$ : Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on écrit que : $P([Y = y]) = P([g(X) = y])$, et on se ramène alors à $X$.

**Exercice 3.** Reprendre l'exemple 1 du début et étudier $U = Z^2 - Z - 2$.

# II Moments d'une variable aléatoire réelle finie

## II. 1 Espérance d'une variable aléatoire réelle finie

On s'intéresse ici à la moyenne d'un phénomène aléatoire. Mais la moyenne au sens arithmétique semble sans intérêt car certaines valeurs ont une probabilité plus forte que d'autres d'arriver. On va ainsi s'intéresser à une moyenne pondérée par la probabilité qu'a la valeur d'arriver.

**Définition 5.** Soit $X$ une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- On appelle espérance de $X$ notée $E(X)$ le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

- Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée.

**Exemples.**
- Si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X) = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i)$
- Si $X(\Omega) = \{-3, -1, 1, 2\}$ alors $E(X) = -3P(X = -3) - P(X = -1) + P(X = 1) + 2P(X = 2)$
- Si $X$ est une varf constante égale à $a$ : $X = a$, alors $E(X) = a$

**Remarque.** L'espérance est ainsi la moyenne de chacune des valeurs prises par la variable aléatoire $X$ pondérée par la probabilité que $X$ prenne cette valeur.

**Exemple 8.** Calculer l'espérance dans chacun des exemples du début.

**Théorème de transfert**

**Théorème 4.** Soit $X$ une var avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et $Y = g(X)$. Alors, on a

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i)$$

**Exemples.**
- Si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 P(X = i)$
- Si $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ alors $E(\ln(X)) = \sum_{i=1}^{6} \ln(i) P(X = i)$

- Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X^3) = \sum_{i=1}^{n} i^3 P(X = i)$

**Exercice 4.** Reprendre l'exercice 3 et calculer l'espérance des varf $X, Y, Z$ et $T$.

Penser au théorème de transfert pour calculer l'espérance de var de type $Y = g(X)$ avec $X$ connu.

**Définition 6.** Soit $X$ une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on appelle moment d'ordre $k$ de $X$, noté parfois $m_k(X)$, le nombre réel :

$$m_k(X) = E(X^k) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^k P(X = x_i)$$

**Exercice 5.** Calculer les moments d'ordre 0, 1, 2 et 3 de la var $X$ dont la loi est définie dans l'exercice 3.

**Linéarité de l'espérance**

**Proposition 5.** Linéarité de l'espérance :

- Soit $X$ une var et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des var et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

*Démonstration.* Démontrons que $E(aX + b) = aE(X) + b$.

□

**Exercice 6.** On considère $r$ boules numérotées de 1 à $r$ et $n$ tiroirs numérotés de 1 à $n$. On place au hasard chacune des $r$ boules dans l'un des $n$ tiroirs, chaque tiroir pouvant contenir 0, 1 ou plusieurs boules. On note $V$ la var égale au nombre de tiroirs restés vides. Déterminer l'espérance de $V$.

## *II. 2 Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle finie*

**Définition 7.** Soit $X$ une variable aléatoire finie. On appelle variance de $X$, notée $V(X)$, le nombre réel défini par

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

**Remarque.** La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de $X$ et de sa moyenne $E(X)$. Ainsi, la variance mesure l'écart entre $X$ et sa moyenne c'est-à-dire la dispersion de la var $X$.

**Formule de Koenig-Huygens** En pratique, on n'utilise quasiment jamais la définition de la variance pour calculer la variance car cela entraine des calculs compliqués. Ainsi, dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens donnée ci-dessous pour calculer la variance.

**Proposition 6.** Soit $X$ une variable aléatoire finie.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

*Démonstration.* □

**Exemple 9.** Calculer la variance dans chacun des 2 exemples du début.

Méthode pour calculer la variance : utiliser la formule de Koenig-Huygens :

- Étape 1 : calculer l'espérance $E(X)$.
- Étape 2 : calculer en utilisant le théorème de transfert $E(X^2)$.
- Étape 3 : conclure en utilisant la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

**Proposition 7.** Soit $X$ une variable aléatoire finie et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $V(X) \geq 0$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- En particulier on a : $V(X + b) = V(X)$

**Définition 8.** Soit $X$ une variable aléatoire finie. On appelle écart-type de $X$ le nombre réel noté $\sigma$ le nombre

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Exemple 10.**

- Une var d'espérance nulle et d'écart-type (ou de variance) égal à 1 est dite réduite
- Si $X$ est une var d'espérance $m$ et d'écart-type $\sigma$ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est une var centrée réduite. En effet :

## *II. 3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Cette inégalité permet de donner une estimation de l'écart de la variable aléatoire avec son espérance.

**Proposition 8.** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit $X$ une variable aléatoire finie, et $\varepsilon > 0$. On a alors :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

**Remarque.** Intuitivement, on obtient que la probabilité que l'erreur entre $X$ et son espérance soit supérieur à $\varepsilon$ est majorée par $\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$. On remarque que :

- pour $\varepsilon$ grand (un grand écart avec l'espérance), la probabilité est très petite.
- pour $\varepsilon$ petit (un petit écart avec l'espérance), l'inégalité peut ne pas être utile, en particulier si $\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2} > 1$.

**Exercice 7.** On lance $n$ fois de suite un dé équilibré.

1. Soit $X$ le nombre d'apparition du nombre 6. Quelle loi suit $X$ ? Donner son espérance et sa variance.
2. Soit $Y$ la fréquence d'apparition du nombre 6. Exprimer $Y$ en fonction de $X$, et donner son espérance et sa variance.
3. Soit $p_n$ la probabilité que $Y$ soit proche de $\dfrac{1}{6}$ à 0.1 près. Combien de lancers doit-on effectuer pour que $p_n$ soit supérieur à 0.9 ?

# III Lois usuelles

## *III. 1 Loi uniforme*

**Modélisation type**

- Lancer d'un dé équilibré à 6 faces. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu. On obtient
$$\forall k \in [\![1,6]\!],\ P(X=k)=\frac{1}{6}$$
- Autres exemples :
  - ⋆ Tirer une boule dans une urne contenant $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu. On obtient
$$\forall k \in [\![1,N]\!],\ P(X=k)=\frac{1}{N}$$

**Schéma uniforme :**
Expériences dont toutes les issues sont équiprobables.

**Définition 9.** Soit $X$ une var.

- Soit $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ : On dit que $X$ suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ si
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=x_k)=\frac{1}{n}$$
On note alors $X \sim U(n)$
- Cas particulier où $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ :
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k)=\frac{1}{n}$$
On note alors $X \sim U([\![1,n]\!])$

**Représentation graphique**

loiunif.png

**Proposition 9.** Soit $X$ une var.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, $n \in \mathbb{N}^\star$, alors :
$$E(X)=\frac{n+1}{2} \quad V(X)=$$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(X(\Omega))$ avec $X(\Omega)=[\![a,b]\!]$ avec $a<b$, alors :
$$E(X)=\frac{b+a}{2}$$

*Démonstration.* □

## *III. 2 Loi de Bernoulli*

**Modélisation type** Modélisation type :

Une pièce truquée possède $p$ chances de tomber sur pile ( succés) et $q = 1 - p$ chances de tomber sur face (échec). On définit la VARF X qui teste si pile est sortie : $X$ vaut 1 si on obtient pile et 0 sinon.

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p$$

**Schéma de Bernoulli :**
Expériences n'ayant que 2 résultats possibles : succès ou échec.

**Loi**

**Définition 10.** Soit $X$ une var et $p \in [0, 1]$. On dit que $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ si

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$

**Exemples.**
- Soit $A \subset \Omega$ alors la loi $1_A$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $p = P(A)$.

**Représentation graphique**

**Proposition 10.** Soit $X$ une var avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $p \in [0, 1]$. Alors

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p) = pq$$

## *III. 3 Loi binomiale*

**Modélisation type**

- Exemple 1 On dispose d'une urne avec $N$ boules, $R$ rouges et $N - R$ jaunes. On effectue $n$ tirages successifs avec remise, la probabilité d'obtenir exactement $k$ boules rouges parmi les $n$ tirages est
  - $\star$ $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
  - $\star$ Loi de $X$ :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{R^k (N - R)^{n-k}}{N^n}$$

- Exemple 2 (Schéma binomial) On effectue $n$ lancers d'une pièce non équilibrée satisfaisant $P(pile) = p$ et $P(face) = q$ on effectue $n$ lancer et $X$ correspond au nombre de pile on obtient :
  - $\star$ $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
  - $\star$ Loi de $X$ :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

**Loi**

**Définition 11.** Soient $X$ une var, $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que $X$ suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$ si

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim B(n,p)$ ou $X \hookrightarrow B(n,p)$

**Représentation graphique**

**Proposition 11.** Soit $X$ une var avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p) = npq$$

# IV Indépendance de var

## *IV. 1 Indépendance de deux var*

Définition

**Définition 12.** Soient $X$ et $Y$ deux var. On dit que $X$ et $Y$ sont indépendantes si :

**Exercice 8.**

1. Une urne contient $n$ jetons numérotés de 1 à $n$. On en tire 2 successivement avec remise. Soient $X$ le numéro du premier jeton, et $Y$ le numéro du second. Étudier l'indépendance de $X$ et $Y$.
2. Reprendre l'exercice précédent avec deux tirages sans remise.

Conséquence sur les trois types de lois

**Proposition 12.** Soit $(X,Y)$ un couple de var. Il y a équivalence entre :

- Les var $X$ et $Y$ sont indépendantes.
- $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ........................................................
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P([Y=y]) \neq 0$, ....................................
- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P([X=x]) \neq 0$, ....................................

**Proposition 13.** $(X, Y)$ couple, esperance et varaince de $X+Y$ et $XY$.

Lemme des coalitions

**Proposition 14.** Soient $X$ et $Y$ deux var indépendantes.

Alors $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendants.

**Exemples.** Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors, par exemple

- ..........................................................................................
- ..........................................................................................

## *IV. 2 Généralisation : indépendance de n var*

**Définition 13.** Soient $X_1, \ldots X_n$ $n$ var. Elles sont mutuellement indépendantes si :

**Remarques.**
- On vous demandera rarement de montrer que des var sont mutuellement indépendantes. C'est plutôt une donnée de l'exercice qui permet de faire le calcul de la probabilité d'intersections d'événements.
- Exemples types de modèles donnant des var mutuellement indépendantes :
  - $\star$ ..........................................................................................
  - $\star$ ..........................................................................................
  - $\star$ De façon générale : ..........................................................................

**Proposition 15.** Soient $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_p$ des var mutuellement indépendantes. Alors :

- ..........................................................................................
- ..........................................................................................

**Exemples.** Si $X, Y, Z, T$ sont mutuellement indépendantes, alors, par exemple

- ..........................................................................................
- ..........................................................................................