

Correction TD 22 : Variable Aléatoire Réelle

Entraînements

Calculs de lois, fonctions de répartition, espérance et variance

Exercice 1. On dispose d'un dé à 6 faces non truqué. Il possède une face portant le chiffre 1, 2 faces portant le chiffre 2 et 3 faces portant le chiffre 3. On le lance et on note X le chiffre obtenu. Donner la loi de X , sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.

Correction 1.

- Univers image : les seuls numéros que l'on peut obtenir sont 1, 2 et 3, donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
- Calcul de la loi de X . Le dé est non truqué, on a donc équiprobabilité pour chacune des faces du dé. On a 6 faces en tout, et une seule ayant le numéro 1, donc $P(X = 1) = \frac{1}{6}$. On a deux faces portant le numéro 2, donc $P(X = 2) = \frac{2}{6}$, soit $P(X = 2) = \frac{1}{3}$. Enfin, on a trois faces portant le numéro 3, donc $P(X = 3) = \frac{3}{6}$, soit $P(X = 3) = \frac{1}{2}$.
- Fonction de répartition : on utilise la formule du cours :
 - ★ si $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$,
 - ★ si $1 \leq x < 2$, on a $F_X(x) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$,
 - ★ si $2 \leq x < 3$, on a $F_X(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$,
 - ★ si $x \geq 3$, on a $F_X(x) = 1$.
- Espérance : on calcule

$$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

soit $E(X) = \frac{7}{3}$.

- Variance : on utilise la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

On calcule $E(X^2)$ grâce au théorème du transfert :

$$E(X^2) = 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{23}{3}$$

soit $V(x) = \frac{23}{3} - \frac{49}{9}$, et donc $V(X) = \frac{20}{9}$.

Exercice 2. On lance 6 fois un dé non pipé et on note X le nombre de 6 obtenus au cours de ces lancers.

1. Calculer la loi de X . Représenter cette loi par un tableau puis par un diagramme en bâtons.
2. Calculer la fonction de répartition de X .
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. Déterminer la loi de la varf $Y = (X - 3)^2$.
5. On considère $g : x \mapsto \cos(\pi x)$ et on pose $Z = g(X)$. Déterminer l'espérance de la varf Z .

Correction 2. On lance 6 fois un dé non pipé et on note X le nombre de 6 obtenus au cours de ces lancers.

1. Raisonnement direct :

On commence par calculer l'univers : les lancers sont successifs donc avec ordre, et avec répétition, donc Ω est l'ensemble des 6-listes de numéros entre 1 et 6. On a donc $\text{Card } \Omega = 6^6$.

On regarde ensuite l'univers image : $X(\Omega) = \llbracket 0, 6 \rrbracket$. On calcule donc les $P(X = k)$ pour $k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$.

Le dé est non pipé, on a donc équiprobabilité pour tous les lancers : on se ramène à du dénombrement. Je détaille un des cas, les autres se démontrent avec le même raisonnement.

Calcul de $P(X = 1)$. On commence par choisir la place du 6 que l'on a tiré : on a 6 possibilités. Puis pour chaque configuration, on a une possibilité pour le 6, et 5 possibilités pour chacun des numéros qui ne sont pas des 6, soit 5^5 possibilités. On a donc une probabilité $P(X = 1) = \frac{6 \times 5^5}{6^6}$, soit $P(X = 1) = \frac{5^5}{6^5}$.

De même (à détailler), on trouve : $P(X = 0) = \frac{5^6}{6^6}$, $P(X = 2) = \frac{\binom{6}{2} 5^4}{6^6}$, $P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3} 5^3}{6^6}$, $P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} 5^2}{6^6}$,
 $P(X = 5) = \frac{5}{6^5}$, $P(X = 6) = \frac{1}{6^6}$.

Tableau et diagramme à faire.

Raisonnement en reconnaissant une loi usuelle : on a une succession de 6 expériences aléatoires semblables et indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{6}$ (probabilité de tomber sur 6 pour un dé équilibré). On reconnaît donc une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{6}$. On a donc $X(\Omega) = \llbracket 0, 6 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$,

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}.$$

2. On utilise la formule du cours qui donne

★ si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$,

★ $\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, si $x \in [k, k + 1[$, $F_X(x) = \sum_{i=0}^k P(X = i) = \sum_{i=0}^k \binom{6}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{6-i}$,

★ si $x \geq 6$, on a $F_X(x) = 1$.

3. On utilise les formules de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale : $E(X) = 6 \times \frac{1}{6}$, soit $E(X) = 1$,

et $V(X) = 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$, soit $V(X) = \frac{5}{6}$.

4. Soit $h(x) = (x - 3)^2$. On commence par calculer $Y(\Omega) = h(\llbracket 0, 6 \rrbracket) = \{0, 1, 4, 9\}$. Puis on en déduit :

★ $P(Y = 0) = P(X = 3)$, soit $P(Y = 0) = \frac{\binom{6}{3} 5^3}{6^6}$.

★ $P(Y = 1) = P([X = 2] \cup [X = 4]) = P(X = 2) + P(X = 4)$ car ce sont des événements incompatibles.

Soit $P(Y = 1) = \frac{\binom{6}{2} 5^4}{6^6} + \frac{\binom{6}{4} 5^2}{6^6}$.

★ $P(Y = 4) = P([X = 1] \cup [X = 5]) = P(X = 1) + P(X = 5)$, soit $P(Y = 4) = \frac{5^5}{6^5} + \frac{5}{6^5}$.

★ $P(Y = 9) = P([X = 0] \cup [X = 6]) = P(X = 0) + P(X = 6)$, soit $P(Y = 9) = \frac{5^6}{6^6} + \frac{1}{6^6}$.

5. On commence par calculer $Z(\Omega) = g(\llbracket 0, 6 \rrbracket) = \{-1, 1\}$. Puis on en déduit :

★ $P(Z = 1) = P([X = 0] \cup [X = 2] \cup [X = 4] \cup [X = 6])$, soit $P(Z = 1) = \frac{1}{6^6}(5^6 + \binom{6}{2}5^4 + \binom{6}{4}5^2 + 1)$.

★ $P(Z = -1) = P([X = 1] \cup [X = 3] \cup [X = 5])$, soit $P(Z = -1) = \frac{1}{6^6}(5^5 + \binom{6}{3}5^3 + 30)$.

On en déduit l'espérance avec la formule $E(Z) = P(Z = 1) - P(Z = -1)$.

Exercice 3. Soit $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et X une varf à valeurs dans $\llbracket 0, 3 \rrbracket$ dont la loi de probabilité est donnée par

$$P([X = 0]) = P([X = 3]) = \theta \quad P([X = 1]) = P([X = 2]) = \frac{1}{2} - \theta.$$

1. Donner la fonction de répartition de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X .
3. On pose $R = X(X - 1)(X - 2)(X - 3)$. Donner la loi de probabilité de R .

Correction 3. La loi de probabilité d'une var X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P([X = x_i])$	θ	$\frac{1}{2} - \theta$	$\frac{1}{2} - \theta$	θ

1. D'après la formule du cours :

- ★ si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$,
- ★ si $0 \leq x < 1$, on a $F_X(x) = P(X = 0) = \theta$,
- ★ si $1 \leq x < 2$, on a $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \theta + \frac{1}{2} - \theta = \frac{1}{2}$,
- ★ si $2 \leq x < 3$, on a $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \theta + \frac{1}{2} - \theta + \frac{1}{2} - \theta = 1 - \theta$,
- ★ si $x \geq 3$, on a $F_X(x) = 1$.

2. Espérance : on calcule

$$E(X) = \sum_{k=0}^3 kP(X = k) = 0 \times \theta + 1 \times \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 2 \times \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 3\theta$$

soit $E(X) = \frac{3}{2}$ (ce qui était attendu, puisque X est symétrique).

Pour la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, en calculant $E(X^2)$ grâce au théorème du transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^3 k^2P(X = k) = 0^2 \times \theta + 1^2 \times \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 2^2 \times \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 3^2\theta = 4\theta + \frac{5}{2}.$$

On obtient $V(X) = 4\theta - \frac{1}{4}$.

3. On remarque que $R(\Omega) = \{0\}$, donc R est constante égale à 0 : $P(R = 0) = 1$.

4. Ici je donne juste les résultats :

s_i	0	1	t_i	0	1	v_i	0	1
$P([S = s_i])$	$1 - \theta$	θ	$P([T = t_i])$	2θ	$1 - 2\theta$	$P([V = v_i])$	$1 - \theta$	θ

Exercice 4. On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = 0 \text{ sur }] - \infty, -2[, \frac{1}{4} \text{ sur } [-2, 0[, \frac{1}{2} \text{ sur } [0, 3[, \frac{2}{3} \text{ sur } [3, 4[, 1 \text{ sur } [4, +\infty[.$$

1. Tracer la courbe représentative de F .
2. Soit X une varf ayant F pour fonction de répartition. Calculer alors $P([X \leq 1])$, $P([X < 1])$ et $P([-2 \leq X \leq 0])$.
3. Déterminer aussi la loi de X , son espérance et sa variance.
4. Soit Y et Z les varf définies par $Y = \frac{X}{2}$ et $Z = X + 2$. Déterminer les fonctions de répartition de Y et de Z et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que F .

Correction 4.

1. À faire.

2. Par définition, $P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{2}$.

On a de plus $P(X = 1) = 0$ car la fonction F n'a pas de saut en 1, donc $P(X < 1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

On a $P(-2 \leq X \leq 0) = P(X \leq 0) - P(X < -2) = F(0) - 0$, soit $P(-2 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2}$.

3. On a $X(\Omega) = \{-2, 0, 3, 4\}$ car ce sont les points de discontinuité de F . De plus, les probabilités de chaque élément de $X(\Omega)$ sont égales à la valeur du saut de F , soit :

- $P(X = -2) = F(-2) = \frac{1}{4}$,

- $P(X = 0) = F(0) - F(-2) = \frac{1}{4}$,

- $P(X = 3) = F(3) - F(0) = \frac{1}{6}$,

- $P(X = 4) = F(4) - F(3) = \frac{1}{3}$,

On en déduit

$$E(X) = -2P(X = -2) + 0P(X = 0) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4)$$

soit $E(X) = \frac{4}{3}$.

De plus, d'après la formule de Koenig-Huygens, on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Et le théorème du transfert donne

$$E(X^2) = (-2)^2P(X = -2) + 0^2P(X = 0) + 3^2P(X = 3) + 4^2P(X = 4),$$

soit $E(X^2) = \frac{47}{6}$ et donc $V(X) = \frac{109}{18}$.

4. On a $Y(\Omega) = \{-1, 0, \frac{3}{2}, 2\}$, et $Z(\Omega) = \{0, 2, 5, 6\}$ et les probabilités sont les mêmes que précédemment, donc on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \text{si } \frac{3}{2} \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

Le graphe de F_Z est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre 0 du graphe de F , et celui de F_Z le translaté de vecteur $2\mathbf{i}$ de F .

Reconnaître les lois usuelles

Exercice 5. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

1. On réalise 3 tirages successifs avec remise et on note Y le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
2. On tire une boule de l'urne et on note T le numéro de la boule obtenue. Donner la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

Correction 5. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

1. On reconnaît une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, \frac{3}{5})$, $E(X) = \frac{9}{5}$, $V(X) = \frac{9}{5} \times \frac{2}{5}$.
2. On reconnaît une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{3}{5})$, $E(X) = \frac{3}{5}$, $V(X) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$.

Exercice 6. Pour chacune des variables aléatoires décrites ci-dessous, donner la loi exacte, l'espérance et la variance :

1. Nombre de piles au cours du lancer de 20 pièces truquées dont la probabilité d'obtenir face est 0.7.
2. On lance 5 dés.
 - (a) On s'intéresse au nombre de 6.
 - (b) On s'intéresse au numéro obtenu avec le premier dé.
3. Nombre de filles dans les familles de 6 enfants sachant que la probabilité d'obtenir une fille est 0.51.
4. Nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote.
5. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. Nombre d'objets dans le premier tiroir.
6. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. Nombre de bosses.
7. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 1000 trèfles. Nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
8. Il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On s'intéresse au numéro de la boule obtenue.

Correction 6.

1. Nombre de piles au cours du lancer de 20 pièces truquées dont la probabilité d'obtenir face est 0.7 : on a une succession de 20 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est 0.3, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, 0.3)$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 0, 20 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{20}{k} (0.3)^k (0.7)^{20-k}$, $E(X) = 20 \times 0.3$, $V(X) = 20 \times 0.3 \times 0.7$.
2. On lance 5 dés.
 - (a) On s'intéresse au nombre de 6 : on a une succession de 5 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{6}$, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{6}\right)$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$, $E(X) = \frac{5}{6}$, $V(X) = \frac{25}{36}$.
 - (b) On s'intéresse au numéro obtenu avec le premier dé : on tire un numéro au hasard parmi 6 (car le dé est équilibré), donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(6)$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$, $E(X) = \frac{7}{2}$, $V(X) = \frac{35}{12}$.
3. Nombre de filles dans les familles de 6 enfants sachant que la probabilité d'obtenir une fille est 0.51 : on a une succession de 6 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est 0.51 donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(6, 0.51)$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 0, 6 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{6}{k} (0.51)^k (0.49)^{6-k}$, $E(X) = 6 \times 0.51$, $V(X) = 6 \times 0.51 \times 0.49$.
4. Nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote : on a une succession de 100 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est p , donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, p)$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 0, 100 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}$, $E(X) = 100p$, $V(X) = 100p(1-p)$, où p est la probabilité de voter pour ce candidat.

5. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. Nombre d'objet dans le premier tiroir : on a une succession de 20 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{3}$, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, \frac{1}{3})$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 0, 20 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}$, $E(X) = \frac{20}{3}$, $V(X) = \frac{40}{9}$.
6. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. Nombre de bosses : on a autant de chance de tirer 0, 1 ou 2 bosses, donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 2 \rrbracket)$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{1}{3}$, $E(X) = 1$, $V(X) = \frac{4}{9}$.
7. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. Nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis : on a une succession de 100 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{100}$, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{1}{100})$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 0, 100 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{100}{k} (0.01)^k (0.99)^{100-k}$, $E(X) = 1$, $V(X) = \frac{99}{100}$.
8. Il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On s'intéresse au numéro de la boule obtenue : on a autant de chance de tirer n'importe quel numéro, donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(128)$. On en déduit : $X(\Omega) = \llbracket 1, 128 \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{1}{128}$, $E(X) = \frac{129}{2}$, $V(X) = \frac{128^2 - 1}{12}$.

Autres

Exercice 7. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues :

- On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note X le nombre de boules bleues obtenu. Donner la loi de X .
- On réalise 3 tirages successifs sans remise et on note Z le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Z .

Correction 7. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

- Le nombre de tirages total est $\binom{5}{3}$. Le nombre de tirages qui amène k boules bleues sont $\binom{3}{k} \binom{2}{3-k}$ donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}$$

- Faire des tirages successifs sans remise revient à faire un tirage simultané, X et Z ont donc la même loi :

$$P(Z = k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}$$

Exercice 8. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.

- Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y .
- Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
- Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.

Correction 8. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces équilibrées. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.

- On pense ici à passer par la fonction de répartition, car il y a des min et des max. On note N_1 le numéro du premier dé et N_2 celui du deuxième.

- Fonction de répartition de X , puis loi de X . On a tout d'abord $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on cherche à calculer $P(X \leq k)$. Si le plus grand numéro est inférieur à k , cela veut dire que les deux numéros sont inférieurs à k . On a donc $P(X \leq k) = P([N_1 \leq k] \cap [N_2 \leq k])$. Les deux lancers étant indépendants, on obtient :

$$P(X \leq k) = P(N_1 \leq k) \times P(N_2 \leq k).$$

Or les dés sont équilibrés, donc on a équiprobabilité. On en déduit $P(N_i \leq k) = \frac{k}{6}$, et donc $P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}$.

La fonction de répartition de X est donc donnée par

- ★ si $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$,
- ★ si $k \leq x < k + 1$, avec $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, on a $F_X(x) = \frac{k^2}{36}$,
- ★ si $x \geq 6$, on a $F_X(x) = 1$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

- ★ si $k = 1$, on a $P(X = 1) = F_X(1)$, soit $P(X = 1) = \frac{1}{36}$,
- ★ si $k \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$, on a $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k - 1)$, soit $P(X = k) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k - 1)^2}{36}$.

On remarque que l'on peut regrouper les deux cas dans la deuxième formule.

- Fonction de répartition de Y , puis loi de Y . On a de même $Y(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on cherche à calculer cette fois $P(Y > k)$ pour en déduire $P(Y \leq k)$. Si le plus petit numéro est strictement supérieur à k , cela veut dire que les deux numéros sont strictement supérieurs à k . On a donc $P(Y > k) = P([N_1 > k] \cap [N_2 > k])$. Le même raisonnement que précédemment donne $P(Y > k) = \frac{(6 - k)^2}{36}$.

On en déduit $P(Y \leq k) = 1 - \frac{(6 - k)^2}{36}$, puis

- ★ si $x < 1$, on a $F_Y(x) = 0$,
- ★ si $k \leq x < k + 1$, avec $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, on a $F_Y(x) = 1 - \frac{(6 - k)^2}{36}$,
- ★ si $x \geq 6$, on a $F_Y(x) = 1$.

On en déduit la loi de probabilité de Y :

- ★ si $k = 1$, on a $P(Y = 1) = F_Y(1) = 1 - \frac{25}{36}$, soit $P(Y = 1) = \frac{9}{36}$,
- ★ si $k \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$, on a $P(Y = k) = F_Y(k) - F_Y(k - 1)$, soit $P(Y = k) = \frac{(6 - (k - 1))^2}{36} - \frac{(6 - k)^2}{36}$.

2. La formule de l'espérance donne

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^6 kP(X = k) = \sum_{k=1}^6 k \left(\frac{k^2}{36} - \frac{(k - 1)^2}{36} \right) \\ &= \frac{1}{36} \sum_{k=0}^6 k(k^2 - k^2 + 2k - 1) \\ &= \frac{1}{36} \sum_{k=0}^6 k(2k - 1) \\ &= \frac{2}{36} \sum_{k=0}^6 k^2 - \frac{1}{36} \sum_{k=0}^6 k \\ &= \frac{2}{36} \times \frac{6(6 + 1)(12 + 1)}{6} - \frac{1}{36} \times \frac{6(6 + 1)}{2} \end{aligned}$$

en utilisant les formules usuelles de sommes.

On obtient donc : $E(X) = \frac{161}{36}$.

De même, on a

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=1}^6 kP(Y = k) = \sum_{k=1}^6 k \left(\frac{(6 - (k - 1))^2}{36} - \frac{(6 - k)^2}{36} \right) \\
 &= \frac{1}{36} \sum_{k=1}^6 k((6 - k)^2 + 2(6 - k) + 1 - (6 - k)^2) \\
 &= \frac{1}{36} \sum_{k=1}^6 k(13 - 2k) \\
 &= \frac{13}{36} \sum_{k=1}^6 k - \frac{2}{36} \sum_{k=1}^6 k^2 \\
 &= \frac{13}{36} \times \frac{6(6 + 1)}{2} - \frac{2}{36} \times \frac{6(6 + 1)(12 + 1)}{6}
 \end{aligned}$$

soit $E(Y) = \frac{91}{36}$. On vérifie que l'on a bien $E(X) > E(Y)$, ce qui est normal, car la valeur moyenne du plus grand numéro doit être supérieure à la valeur moyenne du plus petit numéro.

3. D'après la formule de Koenig-Huygens, on a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. De plus, d'après le théorème de transfert on a :

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=1}^6 k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^6 k^2 \left(\frac{k^2}{36} - \frac{(k - 1)^2}{36} \right) \\
 &= \frac{1}{36} \sum_{k=0}^6 k^2(2k - 1) \\
 &= \frac{2}{36} \sum_{k=0}^6 k^3 - \frac{1}{36} \sum_{k=0}^6 k^2 \\
 &= \frac{2}{36} \times \left(\frac{6(6 + 1)}{2} \right)^2 - \frac{1}{36} \times \frac{6(6 + 1)(12 + 1)}{6}
 \end{aligned}$$

On obtient donc $E(X^2) = \frac{791}{36}$. On en déduit $V(X) = \frac{2555}{36^2} \simeq 1.97$.

La même méthode donne : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$, avec :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{k=1}^6 k^2 P(Y = k) = \sum_{k=1}^6 k^2 \left(\frac{(6 - (k - 1))^2}{36} - \frac{(6 - k)^2}{36} \right) \\ &= \frac{1}{36} \sum_{k=1}^6 k^2 (13 - 2k) \\ &= \frac{13}{36} \sum_{k=1}^6 k^2 - \frac{2}{36} \sum_{k=1}^6 k^3 \\ &= \frac{13}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6} - \frac{2}{36} \times \left(\frac{6(6+1)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

On obtient donc $E(Y^2) = \frac{301}{36}$. On en déduit $V(Y) = \frac{2555}{36^2} \simeq 1.97$. Remarquons qu'il est logique que le minimum et le maximum des numéros aient la même variance, c'est-à-dire la même dispersion par rapport à leur valeur moyenne.

Exercice 9. On considère deux urnes comportant chacune des jetons numérotés de 1 à n , avec $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X .
2. En déduire la loi de X .
3. Calculer l'espérance $E(X)$. En déduire un équivalent de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction 9. On considère deux urnes comportant chacune des jetons numérotés de 1 à n , avec $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X .
2. En déduire la loi de X .
3. Calculer l'espérance $E(X)$. En déduire un équivalent de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. On lance m dés non truqués numérotés de 1 à m .

1. Soit X_1 la var égale au nombre de dés amenant le 6. Donner la loi de X_1 , son espérance et sa variance.
2. On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui amènent 6 lors du deuxième lancer. Calculer $P(X_2 = k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$. En déduire la loi de X_2 son espérance et sa variance.

On pourra montrer en particulier que : $\binom{m}{i} \binom{m-i}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{i}$.

3. On poursuit l'expérience précédente : à chaque lancer, on relance uniquement les dés qui n'ont pas donné 6 aux lancers précédents. Soit X_n la varf égale au nombre de dés amenant 6 au n -ième lancer.
 - (a) Soit $Z_{i,n}$ la var valant 1 si le dé numéroté i donne 6 au n -ième lancer et 0 sinon. Calculer la loi de $Z_{i,n}$.
 - (b) Déterminer la loi de X_n et donner sans calcul son espérance et sa variance.

Correction 10. On lance m dés non truqués.

1. Soit X_1 la var égale au nombre de dé amenant le 6. Donner sans calcul la loi de X_1 son espérance et sa variance :

On reconnaît une loi binomiale car X_1 est un nombre de succès, le succès correspondant à obtenir le chiffre 6 et l'expérience revient bien à répéter m fois la même expériences dans les mêmes conditions (car tous les

dés sont identiques). On a ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B} \left(m, \frac{1}{6} \right)$. On a ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket, P([X_1 = k]) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6} \right)^k \left(\frac{5}{6} \right)^{m-k}.$$

De plus, on a : $E(X_1) = \frac{m}{6}$ et $V(X_1) = \frac{5m}{36}$.

2. **On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui amènent 6 lors de la deuxième relance. Donner la loi de X_2 son espérance et sa variance. On pourra montrer en particulier que :** $\binom{m}{1} \binom{m-1}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{1}$.

• On peut commencer par vérifier l'égalité des coefficients binomiaux donnée.

★ D'un côté, on a : $\binom{m}{l} \binom{m-l}{k} = \frac{m!}{l!k!(m-l-k)!}$ en simplifiant par $(m-l)!$.

★ De l'autre côté, on a : $\binom{m}{k} \binom{m-k}{l} = \frac{m!}{l!k!(m-l-k)!}$ en simplifiant par $(m-k)!$.

Ainsi on a bien que : $\boxed{\binom{m}{l} \binom{m-l}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{l}}$.

• Loi de X_2 :

★ Univers image : $\boxed{X_2(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket}$.

★ Loi :

Soit $k \in X_2(\Omega)$. On remarque que pour calculer $P([X_2 = k])$, on a besoin de connaître le nombre de dés que l'on relance lors de la deuxième relance. Et ainsi on a besoin de connaître le nombre de dés qui ont amené 6 lors du premier lancer. On utilise donc le sce associé à la var X_1 . Ainsi comme $([X_1 = 0]; [X_1 = 1]; [X_1 = 2]; \dots; [X_1 = m])$ est un sce on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P([X_2 = k]) = \sum_{l=0}^m P([X_1 = l] \cap [X_2 = k]).$$

Puis comme d'après la question 1, on a bien que pour tout $l \in \llbracket 0, m \rrbracket$: $P([X_1 = l]) \neq 0$, les probabilités conditionnelles $P_{[X_1=l]}$ existent toutes. Ainsi on obtient d'après la formule des probabilités composées :

$$P([X_2 = k]) = \sum_{l=0}^m P([X_1 = l])P_{[X_1=l]}([X_2 = k]).$$

En utilisant la question 1, on obtient que : $\forall l \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $P([X_1 = l]) = \binom{m}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^l \left(\frac{5}{6}\right)^{m-l}$. Puis on

a : $P_{[X_1=l]}([X_2 = k]) = \binom{m-l}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{m-l-k}$ car on sait que l'on relance alors $m-l$ dés. On peut alors calculer la somme et on obtient que :

$$P([X_2 = k]) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^l \left(\frac{5}{6}\right)^{m-l} \binom{m-l}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{m-l-k} = \sum_{l=0}^m \binom{m}{k} \binom{m-k}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^{l+k} \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-2l-k}$$

en utilisant l'égalité sur les coefficients binomiaux démontrée ci-dessus. On sort alors tout ce qui ne dépend pas de l indice de sommation et on obtient que :

$$P([X_2 = k]) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k} \sum_{l=0}^m \binom{m-k}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^l \left(\frac{5}{6}\right)^{-2l} = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k} \sum_{l=0}^m \binom{m-k}{l} \left(\frac{6}{25}\right)^l.$$

Comme, pour tout $l > m-k$, on a : $\binom{m-k}{l} = 0$, on obtient alors en utilisant la relation de Chasles que :

$$P([X_2 = k]) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k} \sum_{l=0}^{m-k} \binom{m-k}{l} \left(\frac{6}{25}\right)^l.$$

On reconnaît alors le binôme de Newton et on obtient que :

$$\begin{aligned}
 P([X_2 = k]) &= \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k} \left(\frac{6}{25} + 1\right)^{m-k} \\
 &= \binom{m}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{25}{36}\right)^m \left(\frac{31}{25}\right)^{m-k} \\
 &= \binom{m}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{25}{36}\right)^k \left(\frac{25}{36}\right)^{m-k} \left(\frac{31}{25}\right)^{m-k} \\
 &= \binom{m}{k} \left(\frac{5}{36}\right)^k \left(\frac{31}{36}\right)^{m-k}.
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{31}{36} = 1 - \frac{5}{36}$, on reconnaît alors l'expression d'une loi binomiale et ainsi on a : $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{5}{36}\right)$.

- Espérance et variance de X_2 : On obtient que $E(X_2) = \frac{5m}{36}$ et $V(X_2) = \frac{155m}{36^2}$.

Exercice 11. Un magicien possède une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Il lance le dé n fois, et on note X la fréquence d'apparition du pile au cours de ces n lancers.

1. Déterminer la loi de X , ainsi que son espérance et sa variance.
2. On note p_n la probabilité que l'erreur entre X et son espérance soit supérieure à 0.1. Calculer le nombre de lancers n à effectuer pour que p_n soit inférieure à 0.2.

Correction 11. Un magicien possède une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Il lance la pièce n fois, et on note X la fréquence d'apparition du pile au cours de ces n lancers.

1. **Déterminer la loi de X , ainsi que son espérance et sa variance.**

On note Y le nombre d'apparitions du pile au cours des n lancers. Comme les expériences sont indépendantes et ont toutes la même probabilités de succès $\frac{1}{3}$, Y suit une loi binomiale : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$. On a donc

$$Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ et } P(Y = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}, \quad E(Y) = np = \frac{n}{3} \text{ et } V(Y) = np(1-p) = \frac{2n}{9}.$$

On a de plus $X = \frac{Y}{n}$. On en déduit alors, d'après les propriétés sur l'espérance et la variance : $X(\Omega) =$

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}, \text{ et } P\left(X = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}, \quad E(X) = \frac{E(Y)}{n} = \frac{1}{3} \text{ et } V(X) = \frac{V(Y)}{n^2} = \frac{2}{9n}.$$

2. **On note p_n la probabilité que l'erreur entre X et son espérance soit supérieure à 0.1. Calculer le nombre de lancers n à effectuer pour que p_n soit inférieure à 0.2.**

D'après l'énoncé, on a $p_n = P(|X - E(X)| \geq 0.1)$. On cherche la valeur de n à partir de laquelle on a $p_n \leq 0.2$. Or d'après la formule de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$p_n \leq \frac{V(X)}{0.1^2}.$$

Pour avoir p_n inférieure à 0.2, il suffit donc d'avoir :

$$\frac{V(X)}{0.1^2} \leq 0.2 \Leftrightarrow \frac{2}{9n \times 0.1^2} \leq 0.2 \Leftrightarrow n \geq \frac{2}{9 \times 0.1^2 \times 0.2}.$$

L'application numérique donne $n \geq 112$ lancers.

Exercice 12. Une urne contient n boules : m sont blanches et les autres sont noires ($1 \leq m < n$). On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que l'on ait obtenu toutes les boules blanches. On note Y le nombre de tirages effectués.

1. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note X_i le nombre de boules blanches obtenues au cours des i premiers tirages. Quelle est la loi de X_i ?
2. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, l'évènement $[Y \leq k]$ en fonction de X_k . Calculer alors $P([Y \leq k])$. En déduire la loi de Y .
3. Retrouver le résultat ci-dessus en calculant directement la loi. On pourra exprimer l'évènement $[Y = k]$ avec X_{k-1} et B_k avec B_k l'évènement « tirer une boule blanche au tirage k ».
4. On suppose $m = 1$, donner explicitement la loi de Y . Même question si $m = 2$.

Correction 12. Une urne contient n boules : m sont blanches et les autres sont noires ($1 \leq m < n$). On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que l'on ait obtenu toutes les boules blanches. On note Y le nombre de tirages effectués.

1. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note X_i le nombre de boules blanches obtenues au cours des i premiers tirages. Quelle est la loi de X_i ?

On reconnaît une loi hypergéométrique car les tirages se font sans remise et que l'on cherche bien un nombre de succès, le succès correspondant à obtenir une boule blanche. Ainsi on a : $X_i \hookrightarrow \mathcal{H}\left(n, i, \frac{m}{n}\right)$. Ainsi on a $X_i(\Omega) \subset \llbracket 0, i \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 0, i \rrbracket, P([X_i = k]) = \frac{\binom{m}{k} \binom{n-m}{i-k}}{\binom{n}{i}}.$$

2. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, l'évènement $[Y \leq k]$ en fonction de X_k . Calculer alors $P([Y \leq k])$. En déduire la loi de Y :

- On remarque que : $[Y \leq k] = [X_k = m]$ car l'évènement $[Y \leq k]$ correspond à ce que toutes les boules blanches aient été tirées au plus au tirage k (mais elles ont pu être toutes tirées avant le tirage k). Toutes les boules blanches ont été tirées au plus au tirage k correspond donc bien à ce que le nombre de boules blanches tirées en k tirages soit égal à m à savoir au nombre total de boules blanches.

- Comme on connaît la loi de X_k , on en déduit $P([Y \leq k])$. On obtient donc : $P([Y \leq k]) = P([X_k = m]) = \frac{\binom{m}{m} \binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k}}$.

- Loi de Y :

★ Univers image de Y : on a : $Y(\Omega) = \llbracket m, n \rrbracket$ car dans le meilleur des cas on tire d'abord toutes les boules blanches et il faut donc m tirages pour les avoir toutes et dans le pire des cas, on commence par exemple d'abord par tirer toutes les boules noires et seulement ensuite les boules blanches et il faut alors n tirages.

★ Comme on connaît $P([Y \leq k])$ pour tout $k \in Y(\Omega)$, on peut donc en déduire la fonction de répartition de Y . Et comme ici on veut la loi de Y , il faut donc donner le lien entre des évènements type $[Y \leq K]$ et des évènements type $[Y = k]$. Ce raisonnement est classique et doit être connu.

- Passage de la fonction de répartition à la loi :

On a : $[Y \leq k] = [Y = k] \cup [Y < k] = [Y = k] \cup [k-1 < Y < k] \cup [Y \leq k-1]$. Comme $[k-1 < Y < k] = \emptyset$, on obtient que : $[Y \leq k] = [Y = k] \cup [Y \leq k-1]$. Puis comme ces deux évènements sont deux à deux incompatibles, on obtient que

$$P([Y \leq k]) = P([Y = k]) + P([Y \leq k-1]) \Leftrightarrow P([Y = k]) = P([Y \leq k]) - P([Y \leq k-1]).$$

- Cette égalité nous permet d'obtenir la loi de Y :

Si $k = m$ alors $[Y \leq k-1] = \emptyset$ et ainsi : $P([Y = m]) = P([Y \leq m]) = \frac{1}{\binom{n}{m}}$ car $\binom{n-m}{0} = 1$.

Si $k \in \llbracket m + 1, n \rrbracket$ alors $P([Y = k]) = P([Y \leq k]) - P([Y \leq k - 1]) = \frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k}} - \frac{\binom{n-m}{k-1-m}}{\binom{n}{k-1}}$. Si on écrit les coefficients binomiaux sous forme de factorielle et que l'on fait quelques calculs en factorisant, on obtient que :

$$\forall k \in \llbracket m + 1, n \rrbracket, P([Y = k]) = m \frac{(n-m)!(k-1)!}{n!(k-m)!}.$$

On peut d'ailleurs remarquer que cette formule est aussi vraie pour $k = m$ car $m \frac{(n-m)!(k-1)!}{n!(k-m)!} = m \frac{(n-m)!(m-1)!}{n!(m-m)!} = \frac{(n-m)!m!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{m}}$. On obtient donc au final que :

$$\boxed{\forall k \in Y(\Omega), P([Y = k]) = m \frac{(n-m)!(k-1)!}{n!(k-m)!}.$$

3. **Retrouver le résultat ci-dessus en calculant directement la loi sans passer par la fonction de répartition. On pourra exprimer l'évènement $[Y = k]$ avec X_{k-1} et B_k avec B_k l'évènement « tirer une boule blanche au tirage k » :**

- On peut remarquer que : $[Y = k] = [X_{k-1} = m - 1] \cap B_k$ car l'évènement $[Y = k]$ correspond à tirer la dernière boule blanche au tirage k . Pour cela, il faut bien avoir B_k et avoir tiré toutes les autres boules blanches avant à savoir avoir tiré $m - 1$ boules blanches lors des $k - 1$ premiers tirages.
- On obtient donc $P([Y = k]) = P([X_{k-1} = m - 1] \cap B_k)$. Puis d'après la formule des probabilités composées, on obtient que : $P([Y = k]) = P([X_{k-1} = m - 1])P_{[X_{k-1}=m-1]}(B_k)$ car $P([X_{k-1} = m - 1]) \neq 0$ d'après la question 1 et ainsi la probabilité conditionnelle $P_{[X_{k-1}=m-1]}$ existe bien. On a toujours d'après la question 1 que $P([X_{k-1} = m - 1]) = \frac{\binom{m}{m-1}\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k-1}} = m \frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k-1}}$. Il reste donc à calculer $P_{[X_{k-1}=m-1]}(B_k)$. Lors du k -ième tirage il reste dans l'urne 1 boule blanche et $n - k + 1$ boules en tout. Ainsi on a : $P_{[X_{k-1}=m-1]}(B_k) = \frac{1}{n - k + 1}$. Au final on a donc obtenu que :

$$\boxed{\forall k \in Y(\Omega), P([Y = k]) = P([X_{k-1} = m - 1])P_{[X_{k-1}=m-1]}(B_k) = \frac{m}{n - k + 1} \frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k-1}}.$$

- Il reste alors à vérifier que l'on retrouve bien le même résultat que dans la question précédente. Pour cela on écrit les deux coefficients binomiaux sous la forme de factorielle et on obtient que :

$$\frac{m}{n - k + 1} \frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{m}{n - k + 1} \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = m \frac{(n-m)!(k-1)!(n-k)!}{n!(k-m)!(n-k)!} = m \frac{(n-m)!(k-1)!}{n!(k-m)!}$$

On retrouve bien le même résultat que dans la question 2.

4. **On suppose $m = 1$, donner explicitement la loi de Y . Même question si $m = 2$.**

- **Pour $m = 1$:**

* Univers image : $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

* Loi de Y : soit $k \in Y(\Omega)$. On a : $[Y = k] = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$ avec notations évidentes. Puis d'après la formule des probabilités composées et sous réserve d'existence des probabilités conditionnelles, on obtient que :

$$P([Y = k]) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \dots P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k).$$

De plus $P(N_1) = \frac{n-1}{n} \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_{N_1} existe bien. Puis d'après la formule des probabilités composées, on a : $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} = \frac{n-2}{n} \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle $P_{N_1 \cap N_2}$ existe bien. En itérant le raisonnement on peut alors montrer que toutes les probabilités conditionnelles existent bien. On obtient alors :

$$P([Y = k]) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi on reconnaît une loi uniforme : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

• **Pour $m = 2$:**

On peut ici utiliser le résultat de la question 3 avec $m = 2$. On obtient alors :

★ Univers image : $Y(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$.

★ Loi de Y : soit $k \in Y(\Omega)$. On a :

$$P([Y = k]) = 2 \frac{(n-2)!(k-1)!}{n!(k-2)!} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

Type DS

Exercice 13. Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante : le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i , il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$. S'il ne lui a pas écrit le jour i , il lui écrit le lendemain à coup sûr. Soit X_i la varf de Bernoulli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. Former une relation de récurrence entre $P([X_{i+1} = 1])$ et $P([X_i = 1])$.
2. En déduire la loi de X_i pour tout $i \in \llbracket 1, 365 \rrbracket$.
3. Soit X la varf égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer $E(X)$.

Correction 13. Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante : le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i , il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$. S'il ne lui a pas écrit le jour i , il lui écrit le lendemain à coup sûr. Soit X_i la varf de Bernoulli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. **Former une relation de récurrence entre $P([X_{i+1} = 1])$ et $P([X_i = 1])$:**

Les évènements $([X_i = 0], [X_i = 1])$ forment la sce associé à la var de Bernoulli X_i . Ainsi on obtient en utilisant la formule des probabilités totales que :

$$P([X_{i+1} = 1]) = P([X_i = 0] \cap [X_{i+1} = 1]) + P([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1]).$$

D'après le protocole, on a : $P([X_i = 0]) \neq 0$ et $P([X_i = 1]) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $P_{[X_i=0]}$ et $P_{[X_i=1]}$ existent bien. On peut alors utiliser la formule des probabilités composées et on obtient que :

$$P([X_{i+1} = 1]) = P([X_i = 0])P_{[X_i=0]}([X_{i+1} = 1]) + P_{[X_i=1]}([X_{i+1} = 1]) = P([X_i = 0]) + \frac{1}{2}P([X_i = 1]).$$

Comme de plus $P([X_i = 0]) = 1 - P([X_i = 1])$, on obtient que :

$$P([X_{i+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{2}P([X_i = 1]).$$

2. **En déduire la loi de X_i pour tout $i \in \llbracket 1, 365 \rrbracket$:**

- Pour tout $i \in \llbracket 1, 365 \rrbracket$, on a : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i)$ avec $p_i = P([X_i = 1])$. Ainsi pour connaître la loi de X_i , il suffit de connaître p_i à savoir de calculer $P([X_i = 1])$.
- Calcul de p_i :
La question précédente donne que :

$$\forall i \in \llbracket 1, 365 \rrbracket, \quad p_{i+1} = 1 - \frac{1}{2}p_i.$$

On reconnaît ainsi une suite arithmético-géométrique. On ne détaille pas les calculs mais on obtient au final :

$$\forall i \in \llbracket 1, 365 \rrbracket, \quad p_i = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{i-1} + \frac{2}{3}.$$

- Ainsi, on a : $\forall i \in \llbracket 1, 365 \rrbracket, \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{B} \left(\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{i-1} + \frac{2}{3} \right).$

3. **Soit X la varf égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer $E(X)$:**

On remarque que : $X = \sum_{i=1}^{365} X_i$. Ainsi par linéarité de l'espérance, on obtient que : $E(X) = \sum_{i=1}^{365} E(X_i)$. De

plus comme $X_i \hookrightarrow \mathcal{B} \left(\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{i-1} + \frac{2}{3} \right)$, on a : $E(X_i) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{i-1} + \frac{2}{3}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{365} \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{i-1} + \frac{2}{3} \right] \\ &= \frac{-2}{3} \sum_{i=1}^{365} \left(-\frac{1}{2} \right)^i + \frac{2}{3} \times 365 \\ &= \frac{2}{9} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{365} \right) + \frac{730}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 14. Un tireur doit toucher n cibles ($n \in \mathbb{N}^*$) numérotées de 1 à n dans l'ordre et il s'arrête dès qu'il rate une cible. On suppose que s'il se présente devant la k -ième cible, la probabilité qu'il la touche est $p_k \in]0, 1[$. On note X le nombre de cibles touchées.

- Déterminer la loi de X .
- On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_k = p$.
 - Déterminer la loi de X en fonction de p et de $q = 1 - p$.
 - Pour tout $t \in [0, 1]$, on définit la fonction génératrice associée à X par : $G_X(t) = E(t^X)$. Justifier que $G'_X(1) = E(X)$ et en déduire l'espérance de X ainsi que la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction 14.

- On commence par trouver l'univers image : on peut toucher de 0 à n cibles, donc $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
Notons F_k l'événement « le tireur touche la k -ième cible ». D'après l'énoncé, $P(F_k) = p_k$. De plus, on a, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$P(X = k) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}),$$

car pour toucher exactement k cibles, il faut réussir les k premiers coups, et rater la cible au $k+1$ -ième essai. On a, d'après la formule des probabilités composées, comme $P(F_1 \cap \dots \cap F_k) \neq 0$:

$$P(X = k) = P(F_1) \times P_{F_1}(F_2) \times \dots \times P_{F_1 \cap \dots \cap F_k}(\overline{F_{k+1}})$$

d'où $P(X = k) = p_1 p_2 \dots p_k (1 - p_{k+1})$.

Pour $k = 0$, il faut rater la première cible, donc $P(X = 0) = 1 - p_1$.

Pour $k = n$, il faut toucher toutes les cibles. le même raisonnement donne $P(X = n) = p_1 p_2 \dots p_n$.

2. (a) D'après la question précédente, on a, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P(X = k) = p^k q$, et $P(X = n) = p^n$.
- (b) D'après le théorème de transfert, on a

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^n t^k P(X = k).$$

Cette expression est un polynôme en t , donc est bien dérivable par rapport à t , et on a

$$G'_X(t) = 0 + \sum_{k=1}^n k t^{k-1} P(X = k).$$

On en déduit

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^n k P(X = k),$$

On a donc bien : $G'_X(1) = E(X)$.

Calculons $G_X(t)$. On a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k P(X = k) = q + \sum_{k=1}^{n-1} t^k p^k q + t^n p^n = q \sum_{k=0}^{n-1} (tp)^k + t^n p^n.$$

Or $tp \neq 1$, donc on a

$$G_X(t) = q \frac{1 - (tp)^n}{1 - tp} + t^n p^n.$$

On dérive :

$$G'_X(t) = q \frac{-np(tp)^{n-1}(1-tp) - (1-(tp)^n)(-p)}{(1-tp)^2} + nt^{n-1}p^n.$$

On prend la valeur en $t = 1$, et on obtient

$$E(X) = G'_X(1) = q \frac{-np^n(1-p) + p(1-p^n)}{(1-p)^2} + np^n = -np^n + \frac{p}{q}(1-p^n) + np^n.$$

en utilisant le fait que $1-p=q$. On a donc $E(X) = \frac{p}{q}(1-p^n)$.

On a $p \in]0, 1[$, donc $\lim_{+\infty} p^n = 0$. De plus, $np^n = ne^{n \ln p}$ avec $\ln p < 0$, donc par théorème des croissances

comparées on a $\lim_{+\infty} np^n = 0$. Donc finalement, $\lim_{+\infty} E(X) = \frac{p}{q}$.

Exercice 15. On considère une urne de taille $N > 1$ contenant r boules blanches et $N-r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. (a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
 - (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
 - (c) Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X . Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
On revient désormais au cas général $1 < r < N$.
2. Calculer l'univers image de X .

3. Soit k une de ces valeurs.
 - (a) Déterminer la probabilité qu'au cours des $k - 1$ premiers tirages soient apparus $r - 1$ boules blanches.
 - (b) Vérifier que :
$$P([X = k]) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$
4. Calculer l'espérance et la variance de X .

Correction 15. On considère une urne de taille $N > 1$ contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. (a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
 (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
 (c) Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X . Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
 On revient désormais au cas général $1 < r < N$.
2. Calculer l'univers image de X .
3. Soit k une de ces valeurs.
 - (a) Déterminer la probabilité qu'au cours des $k - 1$ premiers tirages soient apparus $r - 1$ boules blanches.
 - (b) Vérifier que :
$$P([X = k]) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$
4. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 16. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n -ième tirage.

1. Déterminer Y_1 .
2. Soit $n \geq 2$.
 - (a) Justifier que $Y_n \leq N - 1$.
 - (b) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on a

$$P(Y_n = k) = \frac{N - k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k + 1}{N} P(Y_{n-1} = k + 1).$$

3. En déduire que la suite $(E(Y_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $E(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Correction 16. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n -ième tirage.

1. **Déterminer Y_1** : À l'issue du premier tirage, un seul numéro a été tiré et il y a donc toujours $N - 1$ numéros non encore tirés. Ainsi $Y_1(\Omega) = \{N - 1\}$ et $P(Y_1 = N - 1) = 1$. La var Y_1 est la var certaine égale à $N - 1$.
2. **Soit $n \geq 2$.**
 - (a) **Justifier que $Y_n \leq N - 1$** :
 Après n tirages, le nombre minimum de numéros sortis est 1 dans le cas où on a toujours tiré le même numéro. Ainsi le nombre maximum de numéros non encore sortis est $N - 1$. Ainsi on vient bien de montrer que : $Y_n \leq N - 1$. Ainsi on a : $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$.

(b) **Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on a**

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} \mathbf{P}(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} \mathbf{P}(Y_{n-1} = k+1).$$

Soit $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ fixé. Pour obtenir $[Y_n = k]$ lors du tirage n , seulement deux cas sont possibles lors du tirage $n-1$. Soit on a : $[Y_{n-1} = k]$, soit on a : $[Y_{n-1} = k+1]$. En effet pour avoir k numéros non encore sortis au tirage n :

- soit il restait déjà k numéros non encore sortis au tirage $n-1$ et lors du tirage n on a tiré un numéro déjà sorti
- soit il restait $k+1$ numéros non encore sortis au tirage $n-1$ et lors du tirage n on a tiré un nouveau numéro jamais sorti.

Puis en utilisant ensuite la formule des probabilités totales, on obtient que :

$$P([Y_n = k]) = P([Y_{n-1} = k] \cap [Y_n = k]) + P([Y_{n-1} = k+1] \cap [Y_n = k]).$$

Puis d'après la formule des probabilités composées, on obtient que :

$$P([Y_n = k]) = P([Y_{n-1} = k])P_{[Y_{n-1}=k]}([Y_n = k]) + P([Y_{n-1} = k+1])P_{[Y_{n-1}=k+1]}([Y_n = k]).$$

D'après le protocole, on a : $P([Y_{n-1} = k]) \neq 0$ et $P([Y_{n-1} = k+1]) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $P_{P([Y_{n-1}=k])}$ et $P_{P([Y_{n-1}=k+1])}$ existent bien. On a alors :

- Pour obtenir $[Y_n = k]$ sachant $[Y_{n-1} = k]$, il faut choisir lors du tirage n un des $N-k$ numéros déjà sorti lors des $n-1$ -ième premiers tirages. Ainsi on a : $P_{[Y_{n-1}=k]}([Y_n = k]) = \frac{N-k}{N}$.
- Pour obtenir $[Y_n = k]$ sachant $[Y_{n-1} = k+1]$, il faut choisir lors du tirage n un des $k+1$ numéros pas encore tirés lors des $n-1$ -ième premiers tirages. Ainsi on a : $P_{[Y_{n-1}=k+1]}([Y_n = k]) = \frac{k+1}{N}$.

On obtient donc bien au final que :

$$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$

3. En déduire que la suite $(\mathbf{E}(Y_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $\mathbf{E}(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrons que la suite $(E(Y_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique :
Par définition de l'espérance, on a pour tout $n \geq 1$:

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{N-1} k P([Y_n = k]).$$

On utilise alors l'égalité démontrée à la question précédente afin d'essayer de trouver un lien entre $E(Y_n)$ et $E(Y_{n-1})$. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} k \left(\frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k(N-k) P(Y_{n-1} = k) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k(k+1) P(Y_{n-1} = k+1). \end{aligned}$$

On pose alors le changement de variable $j = k + 1$ dans la deuxième somme et on obtient que :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k(N-k)P(Y_{n-1} = k) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (k-1)kP(Y_{n-1} = k) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{N-1} [k(N-k) + (k-1)k] P(Y_{n-1} = k) \right) + 0 + (N-1)P(Y_{n-1} = N) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{N-1} k(N-1)P(Y_{n-1} = k) \right) \end{aligned}$$

en utilisant la relation de Chasles puis en utilisant le fait que $P(Y_{n-1} = N) = 0$ car $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

On obtient alors :

$$E(Y_n) = \frac{N-1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} kP(Y_{n-1} = k) = \frac{N-1}{N} E(Y_{n-1}).$$

Ainsi la suite $(E(Y_n))_{n \geq 1}$ est bien une suite géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$.

- Expression de $(E(Y_n))_{n \geq 1}$:

On obtient donc :

$$\forall n \geq 1, E(Y_n) = E(Y_1) \times \left(\frac{N-1}{N} \right)^{n-1}.$$

Mais on a montré à la question 1 que la var Y_1 est la var certaine égale à $N-1$. Ainsi $E(Y_1) = N-1$.

On obtient donc :

$$\forall n \geq 1, E(Y_n) = (N-1) \times \left(\frac{N-1}{N} \right)^{n-1}.$$

Exercice 17. Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée de tirages selon le protocole suivant : on tire une boule de l'urne puis

- si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne
- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la var égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du n -ième tirage. On notera de plus les événements suivants :

- R_k : lors du k -ième tirage, on a extrait une boule rouge de l'urne
- B_k : lors du k -ième tirage, on a extrait une boule bleue de l'urne

1. Donner la loi de probabilité de Y_1 .
2. Soit $n \geq 2$. Donner l'univers image de Y_n .
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P([Y_n = 2])$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = P([Y_n = 1])$.
 - (a) Donner u_1 et u_2 .
 - (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$. Cette relation reste-elle valable pour $n = 1$?
 - (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , en déduire l'expression de v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .
 - (d) Déduire des résultats précédents $P([Y_n = 0])$ pour tout n entier naturel non nul.

5. Calculer l'espérance de Y_n .
6. Montrer que : $P([Y_n > 0]) \leq E(Y_n)$. Que peut-on dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([Y_n = 0])$?
7. On note Z la varf égale au numéro du tirage amenant la dernière boule rouge.
 - (a) Donner l'univers image de Z .
 - (b) Soit k un entier naturel, $k \geq 2$. Exprimer l'événement $[Z = k]$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1} .
 - (c) En déduire la loi de Z .

Correction 17. Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée de tirages selon le protocole suivant : on tire une boule de l'urne puis

- si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne
- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la var égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du n -ième tirage. On notera de plus les événements suivants :

- R_k : lors du k -ième tirage, on a extrait une boule rouge de l'urne
- B_k : lors du k -ième tirage, on a extrait une boule bleue de l'urne

1. Donner la loi de probabilité de Y_1 .
2. Soit $n \geq 2$. Donner l'univers image de Y_n .
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P([Y_n = 2])$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = P([Y_n = 1])$.
 - (a) Donner u_1 et u_2 .
 - (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$. Cette relation reste-elle valable pour $n = 1$?
 - (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , en déduire l'expression de v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .
 - (d) Déduire des résultats précédents $P([Y_n = 0])$ pour tout n entier naturel non nul.
5. Calculer l'espérance de Y_n .
6. Montrer que : $P([Y_n > 0]) \leq E(Y_n)$. Que peut-on dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([Y_n = 0])$?
7. On note Z la varf égale au numéro du tirage amenant la dernière boule rouge.
 - (a) Donner l'univers image de Z .
 - (b) Soit k un entier naturel, $k \geq 2$. Exprimer l'événement $[Z = k]$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1} .
 - (c) En déduire la loi de Z .