

# TD - 21 : Dérivation

## I Calculs de dérivés

**Exercice 1.** Avec des polynômes.

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

2.  $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$

3.  $f(x) = \frac{15x^4 - 30x^3 + 40x^2 - 20x + 7}{(x-1)^5}$

4.  $f(x) = \left(\frac{3+x}{2x+1}\right)^4$

5.  $f(x) = (4-3x)^5$

6.  $f(x) = \frac{(4x-3)^3}{3x^2+1}$

**Exercice 2.** Mêmes questions, avec des racines et valeurs absolues.

1.  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

2.  $f(x) = x^n \sqrt{1-x}, n \in \mathbb{N}^*$

3.  $f(x) = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

4.  $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)^2$

5.  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

6.  $f(x) = x|x|$

**Exercice 3.** Mêmes questions, avec des exponentielles et logarithmes.

1.  $f(x) = x^x$

2.  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

3.  $f(x) = \ln|x|$

4.  $f(x) = \ln|(x^2+1)^3|$

5.  $f(x) = \ln\left(\frac{x^x-1}{x^x+1}\right)$

6.  $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

7.  $f(x) = \ln(\ln x)$

8.  $f(x) = |\ln(x)|$

**Exercice 4.** Mêmes questions, avec des fonctions trigonométriques.

1.  $f(x) = \tan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

2.  $f(x) = \cos^4 x$

3.  $f(x) = (\sin(x))e^{\cos x}$

4.  $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$

5.  $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

**Exercice 5.** Calculer la dérivée de  $f : x \mapsto a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}$  avec  $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ .

**Exercice 6.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixé, et soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$  et dérivable en  $x_0$ .

Calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$ .

## II Étude de la régularité d'une fonction

**Exercice 7.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ .

**Exercice 8.** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{1 - e^{-3x}}$ .

1. Donner le domaine de définition et les limites aux bornes. Étudier la continuité de  $f$ , et prolonger  $f$  par continuité lorsque c'est possible.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction prolongée.

**Exercice 9.** Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

1. Donner le domaine de définition et les limites aux bornes.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $g$ .

**Exercice 10.** On pose  $f(x) = \begin{cases} \exp(x^2 - 3x + 2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 - \frac{1}{\ln(x - 2)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ .

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f$ .
2. La fonction  $f$  est-elle continue? Dérivable?
3. Étudier les variations de  $f$ . Tracer la courbe.
4. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$  sur un intervalle à déterminer.
5. Étudier la fonction réciproque : domaine de définition, continuité, variations, dérivabilité, courbe.
6. Déterminer explicitement l'expression de la réciproque.

### III Utilisation des théorèmes liés à la dérivation

**Exercice 11.** Montrer que si  $f$  est dérivable  $n$  fois sur  $[a, b]$  et admet  $n + 1$  zéros sur  $]a, b[$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :  $f^{(n)}(c) = 0$ .

**Exercice 12.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme non constant dont toutes les racines sont réelles et simples. Montrer que toutes les racines de  $P'$  sont réelles et simples.

**Exercice 13.** Soient  $p$  et  $q$  éléments de  $\mathbb{R}$  et  $n$  entier non nul. Montrer que l'équation  $x^n + px + q = 0$  ne peut avoir plus de deux racines si  $n$  est pair, plus de trois si  $n$  est impair.

**Exercice 14.** Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On suppose que  $f'$  est strictement positive sur  $[0, 1]$ .

1. Montrer qu'il existe un réel  $a$  strictement positif tel que :  $\forall x \in [0, 1], f'(x) \geq a$ .
2. En déduire que si  $f(0) = 0$  alors pour tout  $x$  de  $[0, 1]$  on a :  $f(x) \geq ax$ .

**Exercice 15.** Soient  $a > b$  et deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[a, b]$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur cet ensemble. On suppose que l'on a

$$f(a) = g(a) \quad f(b) = g(b) \quad \text{et} \quad f^{(2)} \leq g^{(2)}.$$

En étudiant  $g - f$ , montrer que :  $g \leq f$ .

**Exercice 16.** Montrer les inégalités suivantes

1. Pour tous réels  $a, h$  tels que  $0 < a < a + h < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin(a + h) < \sin a + h \cos a$ .
2.  $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$ .
3.  $\forall x \geq 0, (1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$  avec  $\alpha > 1$ .

4.  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ , x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x}$ .
5.  $\forall (x, y) \in ]-\infty, 0]^2, |e^x - e^y| \leq |x - y|$ .

**Exercice 17.** On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence par 
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite est bien définie, minorée par 0 et strictement majorée par 4.
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N} : |v_{n+1} - 4| < \frac{1}{4}|v_n - 4|$
3. En déduire que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et donner sa limite.

**Exercice 18.** Série de Riemman.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Donner un encadrement du terme  $u_n$  et en déduire un équivalent simple de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ainsi que sa limite.
3. (Plus dur) Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ . En considérant  $(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}$ , déterminer un encadrement puis un équivalent de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## IV Calculs de dérivées n-ièmes

**Exercice 19.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable à tout ordre et  $g, h$  les fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = f(x^2)$  et  $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ . Calculer  $g', g'', g''', h', h'', h'''$  en fonction de  $f', f'', f'''$ .

**Exercice 20.** Linéariser  $f(x) = \cos^3(x)$  et en déduire l'expression de la dérivée  $n$ -ième de  $f$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 21.** Étudier la régularité et donner la dérivée  $n$ -ième des fonctions définies par  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  et  $g(x) = x^5 - \ln(x - 2) + 5e^{-x}$ .

**Exercice 22.** On a montré en cours (et il faudrait refaire la démonstration dans une copie pour pouvoir utiliser la formule) que si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$ , alors  $fg$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et que  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ . En déduire la régularité et la dérivée  $n$ -ième des fonctions définies par

1.  $f(x) = x^3 e^{-x}$
2.  $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$
3.  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
4.  $f(x) = x^{n-1} \ln x$

**Exercice 23.** Montrer que la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $\tan$  est de la forme  $P_n \circ \tan$  où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n + 1$  dont on déterminera le coefficient dominant.

**Exercice 24.** Montrer que la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est de la forme  $x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ , où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$  dont on déterminera le coefficient dominant.

**Exercice 25.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par :  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

1. Calculer  $f'$  et  $f''$ .
2. Montrer par récurrence l'existence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'un polynôme  $P_n$  tel que, pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

Trouver une relation entre  $P_{n+1}, P_n$  et  $P'_n$ .

3. Déterminer le monôme de plus haut degré de  $P_n$ .