Programme de colle : Semaine 24
Mardi 29 Avril

1 Cours

1. Variables aléatoires Seules les variables aléatoires finies sont au programme de BCPST1
   — Définition des variables aléatoires, lois (univers image + $P(X = x_k)$) et fonctions de répartition
   — Espérance, variance. (Bienaimé-Tchebychev n'est pas au programme)
   — Lois usuelles
     — Uniforme : loi + espérance
     — Bernouilli : loi + espérance + variance
     — Binomiale : loi + espérance + variance
   — Indépendance de VA.
   — Une loi binomiale est une somme de loi de Bernouilli indépendantes.
2. Dérivation
   — Dérivabilité en un point et sur un intervalle.
   — Théorème de Rolle
   — Egalité des accroissements finis. (l'inégalité des accroissement n'est pas au programme, il faut redémontrer ce dont on a besoin au cas par cas)
   — Dérivée d'ordre supérieur. (La formule de Liebniz n'est pas au programme)
3. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Modélisation d'une expérience aléatoire a l'aide de de la bibliothèque `random` plus particulièrement des fonctions `randint()` et `random`

2 Exercices Types

Exercice 1. *On dispose d'un dé à 6 faces non truqué. Il possède une face portant le chiffre 1, 2 faces portant le chiffre 2 et 3 faces portant le chiffre 3. On le lance et on note X le chiffre obtenu. Donner la loi de X, sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.*

Exercice 2. *On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues :*

1. *On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note X le nombre de boules bleues obtenu. Donner la loi de X.*
2. *On réalise 3 tirages successifs sans remise et on note Z le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Z.*

Exercice 3. *Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante : le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i, il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$. S'il ne lui a pas écrit le jour i, il lui écrit le lendemain à coup sûr. Soit X_i la varf de Bernoulli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.*

1. *Former une relation de récurrence entre $P([X_{i+1} = 1])$ et $P([X_i = 1])$.*
2. *En déduire la loi de X_i pour tout $i \in [\![1, 365]\!]$.*
3. *Soit X la varf égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer $E(X)$.*

Exercice 4. *On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.*

1. *Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.*

Exercice 5. *Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

Exercice 6. *Soit g la fonction définie par :* $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} \ln(x) & si\ x > 0 \end{cases}$.

1. *Donner le domaine de définition et les limites aux bornes.*
2. *Étudier la continuité et la dérivabilité de g.*

Exercice 7. *Montrer les inégalités suivantes à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à un intervalle bien choisi.*

1. *Pour tous réels a, h tels que* $0 < a < a+h < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin(a+h) < \sin a + h\cos a$.
2. $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.
3. $\forall x \geq 0, \quad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ *avec* $\alpha > 1$.
4. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x}$.
5. $\forall (x,y) \in]-\infty, 0]^2, \quad |e^x - e^y| \leq |x-y|$.

Exercice 8. *Montrer que si f est dérivable n fois sur $[a,b]$ et admet $n+1$ zéros sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :* $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 9. *Soit la fonction f définie sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

1. *Calculer f' et f''.*
2. *Montrer par récurrence l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un polynôme P_n tel que, pour tout* $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

   Trouver une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
3. *Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.*