DM 9

On considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A) **Préliminaires**

1. **[Info]** Écrire en Python une fonction `est_dans_E` qui prend en argument une liste L de longueur 4 puis qui renvoie `True` si le vecteur `(L[0], L[1], L[2], L[3])` appartient à $\mathcal{E}$ et `False` sinon.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{E}$ contenant deux vecteurs.
4. La famille obtenue à la question précédente est-elle libre ?

B) **Projection sur $\mathcal{E}$ parallèlement à un plan de $\mathbb{R}^4$.**

On pose $w_1 = (-1,1,1,1)$, $w_2 = (0,4,2,1)$, $w_3 = (1,1,1,-1)$, $w_4 = (4,2,1,0)$ et $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\,(w_3, w_4)$.

5. Montrer que (w_1, w_2) est une famille génératrice de $\mathcal{E}$.
6. (a) Déterminer une représentation cartésienne de $\mathcal{F}$.
   (b) En déduire que $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \{0\}$.
7. Montrer que (w_1, w_2, w_3, w_4) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.
8. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. Déduire des résultats précédents qu'il existe un unique vecteur $e \in \mathcal{E}$ et un unique vecteur $\mathrm{f} \in \mathcal{F}$ tels que $u = e + \mathrm{f}$. Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^4$, cet unique vecteur $e \in \mathcal{E}$ est appelé le projeté de u sur $\mathcal{E}$ parallèlement à $\mathcal{F}$. On le note $p(u)$ pour les questions suivantes.
9. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les composantes de $p(u)$ en fonction de x, y, z et t.
10. Vérifier que :
    (a) $\forall u \in \mathcal{E}, p(u) = u$,
    (b) $\forall u \in \mathcal{F}, p(u) = 0$.