Correction DS 7

Exercice 1. On considère deux urnes U et V. L'urne U contient 2 jetons rouges et 4 jetons noirs. L'urne V contient 3 jetons rouges et 3 jetons noirs. On effectue une succession de tirages avec remise dans ces deux urnes selon le protocole suivant :

— On choisit une urne au hasard au départ et on tire un jeton.

— A chaque fois que l'on tire un jeton rouge, on change d'urne pour effectuer le tirage suivant. En revanche, si on tire un jeton noir, on reste dans la même urne pour le tirage suivant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on note : U_n (respectivement V_n) l'événement le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U (respectivement le n-ième tirage s'effectue dans l'urne V), R_n l'événement : le n-ième jeton tiré est rouge. Enfin, on pose : $p_n = P(U_n)$ et $q_n = P(V_n)$.

1. Informatique
   (a) Quelle bibliothèque Python permet de simuler des expériences aléatoires ?
   (b) Créer deux listes `UrneU` et `UrneV` constituées des caractères :`'R'` et `'N'` représentant les deux compositions d'urnes.
   (c) Définir une fonction `tirage(L)` prenant comme argument une liste `L` dont chaque élément est un caractère 'R' ou 'N' et qui retourne au hasard un élément de cette liste.
   (d) Définir une fonction `tirage_U(nom)` prenant comme argument une chaîne de caractères `nom` simulant un tirage dans l'urne U si `nom=='U'` et dans V si `nom=='V'`
   (e) Compléter (en recopiant sur votre copie) le script suivant, de sorte qu'il renvoie la liste des n premiers résultats de tirages effectués selon la règle donnée précédemment.

```
def experience(n):
    p=.........
    if p==0:
        urne='U'
    else:
        urne='V'
    resultat=tirag_U(urne)
    liste=[resultat]
    for i in range(n-1):
        if resultat=='N':
            resultat=......
        else:
            if urne='V'
                urne=....

            else:
                ......
            resultat=.....
        liste=.......
    return ............
```

2. Calculer p_1, q_1, p_2 et q_2.
3. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-1}$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on a : $p_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$, puis la valeur de q_n.
5. sont les limites des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^{\star}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^{\star}}$ quand n tend vers l'infini ? Est-ce cohérent ?
6. On tire un jeton rouge au n-ième tirage ($n \in \mathbb{N}^{\star}$). Quelle est la probabilité que ce jeton provienne de l'urne U ?
   Si on note r_n cette probabilité, quelle est la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^{\star}}$ quand n tend vers l'infini ?

Correction 1.

1. (a) C'est la bibliothéue `random`, souvent importée de la manière suivante :

```
import random as rd
```

(b)
```
UrneU=['R']*2+['N']*4
UrneV=['R']*3+['N']*3
```

(c)
```
def tirage(L):
    n=rd.randint(0,len(L)-1)
    return(L[n])
```

(d)
```
def tirage_U(nom):
    if nom=="U":
        return(tirage(UrneU))
    elif nom=="V":
        return(tirage(UrneV))
    else:
        return 'erreur de nom'
```

(e)
```
def experience(n):
    p=rd.randint(0,1)
    if p==0:
        urne='U'
    else:
        urne='V'
    resultat=tirage_U(urne)
    liste=[resultat]
    for i in range(n-1):
        if resultat=='N':
            resultat=tirage_U(urne)
        else:
            if urne='V'
                urne='U'
            else:
                urne='V'
            resultat=tirage_U(urne)
        liste=liste.append(resultat)
    return liste
```

2. • Comme on choisit, au départ une urne au hasard, on a :

$$\boxed{p_1 = q_1 = \frac{1}{2}.}$$

• Comme $(U_1, \overline{U_1} = V_1)$ est un système complet d'événements et que $0 < p_1 < 1$, d'après la formule des probabilités totale, on obtient :

$$\begin{aligned} p_2 &= P_{U_1}(U_2)P(U_1) + P_{V_1}(U_2)P(V_1) = \frac{4}{6}p_1 + \frac{3}{6}q_1 = \boxed{\frac{7}{12}} \\ q_2 &= P_{V_1}(V_2)P(V_1) + P_{U_1}(V_2)P(U_1) = \frac{3}{6}q_1 + \frac{2}{6}p_1 = \boxed{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

Pour le calcul de q_2, on peut aussi utiliser que $(U_2, \overline{U_2} = V_2)$ est un système complet d'événements et ainsi, on a : $q_2 = 1 - p_2 = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$. On retrouve bien entendu le même résultat.

3. Soit $n \geq 2$. Les événements $(U_{n-1}, \overline{U_{n-1}} = V_{n-1})$ forment un système complet d'événements. D'après le protocole, on a : $P(U_{n-1}) \neq 0$ et $P(V_{n-1}) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles

$P_{U_{n-1}}$ et $P_{V_{n-1}}$ existent bien. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales et on obtient

$$p_n = P_{U_{n-1}}(U_n)P(U_{n-1}) + P_{V_{n-1}}(U_n)P(V_{n-1}) = \frac{4}{6}p_{n-1} + \frac{3}{6}q_{n-1} = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-1}.$$

On a donc bien montré que :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-1}.}$$

4.
- Calcul de p_n :
  Comme (U_{n-1}, V_{n-1}) est un système complet d'événements, on sait que : $q_{n-1} = 1 - p_{n-1}$. Ainsi, on obtient
  $$p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{2}(1 - p_{n-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}p_{n-1}.$$
  Ainsi,
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}p_{n-1}}$$
  . On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
  - ⋆ Calcul de la limite éventuelle : on passe à la limite et on obtient : $l = \frac{3}{5}$.
  - ⋆ Suite auxiliaire : on pose pour tout $n \geq 1$: $v_n = p_n - l$. On vérifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{3}{5} = -\frac{1}{10}$. Ainsi, on obtient :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$
  - ⋆ Expression en fonction de n de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$: Comme $p_n = v_n + l$, on obtient
  $$\boxed{\forall n \geq 1, \quad p_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.}$$
- On utilise alors que les événements (U_n, V_n) forment un système complet d'événements et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $q_n = 1 - p_n$ c'est-à-dire :
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad q_n = 1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.}$$

5. Comme : $-1 < \frac{1}{6} < 1$, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 0$. Ainsi,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{2}{5}.}$$
Ces limites sont cohérentes car on a une plus grande proportion de boules rouges dans l'urne V que dans l'urne U (2 chances sur 3 de rester dans U contre 1 chance sur 2 de rester dans V), donc au final on a plus de chances de piocher dans l'urne U.

6.
- On cherche à calculer $P_{R_n}(U_n)$. La chronologie est inversée donc on veut utiliser la formule de Bayes. Pour cela, on doit vérifier les deux hypothèses suivantes :
  - ⋆ $P(U_n) = p_n \neq 0$ d'après la question précédente et ainsi la probabilité conditionnelle P_{U_n} existe bien.

⋆ Vérifions que $P(R_n)$ n'est pas nulle :
Comme (U_n, V_n) est un système complet d'événements et que la question précédente assure que $p_n \neq 0$ et $q_n \neq 0$, on peut utiliser la formule des probabilités totales et on obtient

$$P(R_n) = P_{U_n}(R_n)P(U_n) + P_{V_n}(R_n)P(V_n) = \frac{2}{6}p_n + \frac{3}{6}q_n = -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}$$

en utilisant que : $q_n = 1 - p_n$. Ensuite, en utilisant l'expression en fonction de n de p_n, on obtient

$$P(R_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Ainsi, on obtient bien que : $P(R_n) \neq 0$ (somme de deux nombres strictement positifs) et ainsi la probabilité conditionnelle P_{R_n} existe bien.

On peut donc bien appliquer la formule de Bayes et on obtient

$$P_{R_n}(U_n) = \frac{P_{U_n}(R_n)P(U_n)}{P(R_n)} = \frac{\frac{2}{6}p_n}{P(R_n)} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n}.$$

- Soit r_n la valeur trouvée ci-dessus. Comme $-1 < \dfrac{1}{6} < 1$, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 0$ et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$. Ainsi, par somme et quotient de limite, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \exp(\frac{-1}{x^2})$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction ainsi prolongée.
3. Montrer que f est dérivable en 0 (on étudiera le taux d'accroissement)
4. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
5. On admet que pour tout n il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})f(x)$$

. (Ici $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n-$ éme de f)

(a) Expliciter les polynômes P_0 et P_1

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$P_{n+1}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x}) + 2\frac{1}{x^3}P_n(\frac{1}{x})$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n$$

(d) Soit d_n le degré de P_n, justifier que $d_{n+1} = d_n + 3$ et en déduire la valeur de d_n.

Correction 2.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp(\frac{-1}{x^2})}$$

2. On a $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0$ donc par composée de limites

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}}$$

3. On pose pour $x \neq 0$,

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\exp(\frac{-1}{x^2})}{x}$$

On a par croissance comparés $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\frac{-1}{x^2})}{x} = 0$ Ainsi

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } O \text{ et } f'(0) = 0}$$

4. On a vu à la question 1 que f était dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à dérivée continue. Vérifions que f' est continue en 0. On a $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3}\exp(\frac{-1}{x^2} = 0$ par croissance comparée. Or $f'(0) = 0$, donc f' est continue en 0. Ainsi

$$\boxed{f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

5. (a) On a $f^{(0)}(x) = f(x)$ donc $P_0 = 1$ On a $f^{(1)}(x) = \frac{2}{x^3}f(x)$, donc $P_1 = 2X^3$.

(b) On dérive l'expression donnée entre $f^{(n)}$ et P_n : On a d'une part

$$f^{(n)'}(x) = f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x})f(x)$$

et d'autre part

$$f^{(n)'}(x) = \frac{-1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})f(x) + P_n(\frac{1}{x}f'(x)$$

Or $f'(x) = \frac{2}{x^3}f(x)$, donc

$$f^{(n)'}(x) = \left(\frac{-1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x}) + P_n(\frac{1}{x})\frac{2}{x^3}\right)f(x)$$

Comme $f(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$ on obtient en simplifiant :

$$\boxed{P_{n+1}(\tfrac{1}{x}) = \left(\tfrac{-1}{x^2}P_n'(\tfrac{1}{x}) + P_n(\tfrac{1}{x})\tfrac{2}{x^3}\right)}$$

(c) L'égalité précédente est obtenue pour tout $x \neq 0$. Comme $\frac{1}{x}$ prend une infinité de valeurs sur $\mathbb{R}^*$, les deux polynômes P_{n+1} et $-X^2P_n' + 2X^3P_n$ prennent des valeurs identiques une infinité de fois. Ainsi ces deux polynômes sont égaux :

$$\boxed{P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n}$$

(d) En prenant l'égalité précédente et vérifiant l'égalité des degré on obtient

$$\begin{aligned} deg(P_{n+1}) &= deg(-X^2P_n' + 2X^3P_n) \\ d_{n+1} &= deg(-X^2P_n' + 2X^3P_n) \end{aligned}$$

Or $deg(-X^2P_n') = 2 + d_n - 1 = d_n + 1$ et $deg(2X^3P_n) = 3 + d_n$ donc $deg(-X^2P_n') \neq deg(2X^3P_n)$. Ainsi

$$deg(-X^2P_n' + 2X^3P_n) = max(deg(-X^2P_n'), deg(2X^3P_n)) = 3 + d_n$$

Donc

$$\boxed{d_{n+1} = d_n + 3}$$

On reconnaît une suite arithmétique : on a donc

$$\boxed{d_n = 3n + d_0 = 3n}$$

Exercice 3. Ce problème propose d'étudier quelques propriétés des polynômes palindromiques, c'est-à-dire dont les coefficients peuvent être indifféremment lus dans l'ordre croissant ou décroissant des degrés. Par exemple, le polynôme $2X^6 - X^4 + 5X^3 - X^2 + 2$ est palindromique.

1. Cas du degré 2. Soit $P_2 = aX^2 + bX + a \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré 2 .
   (a) Justifier que 0 n'est pas racine de P_2.
   (b) Rappeler le lien entre les valeurs des racines r_1, r_2 d'un polynôme $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$ et ses coefficients (α, β, γ) . En déduire que si P_2 n'admet pas de racine double alors le produit de ses racines vaut 1 et aucune de ses racines n'est égale à 1 ou -1 .
   (c) Montrer que si P_2 admet une racine double alors cette racine vaut 1 ou -1 .
2. Cas du degré 3. Soit $P_3 = aX^3 + bX^2 + bX + a \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré 3.
   (a) Trouver une racine évidente de P_3.
   (b) Soit $Q_3 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_3 = (X + 1)Q_3$. Montrer que Q_3 est palindromique de degré 2 .
   (c) Que peut-on déduire des résultats précédents sur la multiplicité des racines de P_3 ? (on étudiera différents cas selon la multiplicité des racines de Q_3)
3. Un exemple de degré 4. Soit $P_4 = X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1$.

(a) Développer l'expression $(\alpha + 1/\alpha)^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^\star$.

(b) Montrer que $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P_4 si et seulement si $\alpha+1/\alpha$ est racine de $Q_4 = X^2-5X+4$

(c) En déduire la factorisation de P_4 dans $\mathbb{C}[X]$.

4. Cas général. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme palindromique de degré $d \geqslant 0$. On remarque que les coefficients de P vérifient $a_{d-k} = a_k$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.

   (a) Justifier que 0 n'est pas racine de P.

   (b) On suppose que le degré de d est impair, on l'écrit $d = 2N + 1$ avec $N \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k(X^k + X^{2N+1-k})$$

   (c) En déduire que si d est impair alors -1 est racine de P.

   (d) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $1/\alpha$ aussi (on ne suppose pas ici que d est impair).

5. (INFORMATIQUE) On représente informatiquement un polynôme sous forme d'une liste de ses coefficients ie. `[a0,a1, ... ,an]` représente le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   (a) Quelle polynôme représente la liste [2,3,4,0,0] ?

   (b) Ecrire une fonction Python `simplifie(P)` qui prend en argument une liste `P` correspondant à un polynôme P et retourne la liste qui représente le polynome P mais où le dernier terme est non nul. Exemple = `simplifie( [2,3,4,0,0])` retournera [2,3,4]

   (c) Completer (en recopiant sur votre copie) le code Python `est_palyndrome(P)` qui prend en argument une liste `P` correspondant à un polynôme P et retourne `True` si le polynôme est palyndromique et `False` sinon.

```
def est_palyndrome(P):
    P=simplifie(P)
    for k in range(len(P)):
        if P[k]!=P[......]:
            return .......
    return ......
```

   (d) Ecrire une fonction Python `evaluation(P,x)` qui prend en argument une liste `P` correspondant à un polynôme P et un flottant `x` et retourne la valeur de $P(x)$

   (e) On souhaite coder une fonction Python `derivation(P)` qui prend en argument une liste `P` correspondant à un polynôme P et retourne la liste des coefficients correspondant au polynôme P'. Exemple : Si $P = 2 + 3X + 4X^2$ le polynôme dérivé est $P' = 3 + 8X$, donc `derivation([2,3,4])` retournera `[3,8]`. Des codes suivants lequel correspond à cette procédure. On explicitera ce que rendent les autres codes (erreurs ou valeur de la liste avec l'exemple [2,3,4])

```
def derivation1(P):
    D=[]
    for i in range(1,len(P)):
        D=D+[P[i]*i]
    return  D
```

```
def derivation2(P):
    D=[]
    for i in range(len(P)):
        D=D+[P[i]*i]
    return  D
```

```
def derivation3(P):
    D=[]
    for i in range(len(P)):
        D=D+[P[i+1]*i]
    return  D
```

```
def derivation4(P):
    D=[]
    for i in range(1,len(P)):
        D=D+[P[i]*(i-1)]
    return  D
```

   (f) Ecrire une fonction Python `multiplicite(P,x)` qui prend en argument une liste `P` correspondant à un polynôme P et un flottant `x` et retourne la multiplicité de x (si x n'est pas racine de P, la fonction retournera 0, si x est racine de multiplicité 1 de P, la fonction retournera 1, etc...)

Correction 3.

1. (a) $P_2(0)=a$. Or $a\neq 0$ car le polynôme est degré 2, donc 0 n'est pas racine de P_2.
   (b) Soit r_1, r_2 les deux racines de P_2. On a d'après les relations coefficients racines :
   $$r_1r_2=\frac{a}{a}=1$$
   Si l'une des racines vaut 1 (ou -1), alors l'autre racine vaut 1 (ou -1) ce qui en fait une racine double, contrairement à ce qui a été supposé.
   (c) Si P_2 admet une racine double r, alors de nouveau d'après les relations coefficients racines :
   $$r^2=\frac{a}{a}=1$$
   donc $r\in\{-1,1\}$
2. $P_3(-1)=-a+b-b+a=0$ donc -1 est racine de P_3
3. Soit $Q_3=\alpha X^2+\beta X+\gamma$, on a en développant
   $$(X+1)Q_3=\alpha X^3+(\beta+\alpha)X^2+(\beta+\gamma)X+\gamma$$
   On obtient alors le système :
   $$\begin{cases}\alpha &= a\\ \beta+\alpha &= b\\ \beta+\gamma &= b\\ \gamma &= a\end{cases}$$
   On obtient alors $\alpha=a$, $\beta=b-a$ et $\gamma=a$. Ainsi Q_2 est bien palindromique.
4. Ainsi on peut distinguer deux cas :
   — Soit Q_3 n'admet pas de racine double, et alors toutes les racines sont simples.
   — Soit Q_3 admet la racine double, 1, qui dans ce cas est une racine triple de P_3 soit, la racine double -1 qui est aussi une racine double de P_3.
5. (a)
   $$(\alpha+\frac{1}{\alpha})^2=\alpha^2+2+\frac{1}{\alpha^2}$$
   (b) α est racine de P_4 si et seulement si $P_4(\alpha)=0$ On a alors, comme $\alpha\neq 0$ (car $P_4(0)=1$)
   $$\begin{aligned}&\alpha^4-5\alpha^3+6\alpha^2-5\alpha+1=0\\ \iff\quad&\alpha^2(\alpha^2-5\alpha+6-5\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0\\ \iff\quad&\alpha^2+2+\frac{1}{\alpha^2}-5(\alpha+\frac{1}{\alpha})+4=0\\ \iff\quad&(\alpha+\frac{1}{\alpha})^2-5(\alpha+\frac{1}{\alpha})+4=0\\ \iff\quad&Q_4(\alpha+\frac{1}{\alpha})=0\end{aligned}$$
   (c) Les racines de Q_4 sont 1 et 4. On étudie donc les solutions des équations :
   $$(E_1):(\alpha+\frac{1}{\alpha})=1\quad\text{et}\quad(E_4):(\alpha+\frac{1}{\alpha})=4$$
   —
   $$(E_1)\iff\quad\alpha^2-\alpha+1=0$$
   Et X^2-X+1 admet deux racines $\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$
   —
   $$(E_4)\iff\alpha^2-4\alpha+1=0$$
   Et X^2-4X+1 admet deux racines $2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}$

$$\boxed{P_4 = (X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})(X-2+\sqrt{3})(X-2-\sqrt{3})}$$

6. (a) $P(0) = a_0$. Or $a_0 = a_d$ et $a_d \neq 0$ car le polynôme est de degré d. Ainsi 0 n'est pas racine de P.

   (b) On suppose ici que d est impair, on l'écrit alors sous la forme $d = 2N+1$ On a alors

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=0}^{2N+1} a_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k X^k + \sum_{k=N+1}^{2N+1} a_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k X^k + \sum_{j=0}^{N} a_{2N+1-j} X^{2N+1-j} \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k X^k + \sum_{j=0}^{N} a_j X^{2N+1-j} \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k (X^k + X^{2N+1-k})
\end{aligned}$$

   (c) D'après la question précédente on a donc $P(-1) = \sum_{k=0}^{N} a_k((-1)^k + (-1)^{2N+1-k})$ Or $(-1)^{2N+1-k} = (-1)(-1)^{-k} = -(-1)^k$ donc,

$$P(-1) = 0$$

   (d) Si α est racine alors $\alpha \neq 0$ et

$$\sum_{k=0}^{d} a_k \alpha^k = 0$$

   Donc en divisant par α^d on obtient

$$\sum_{k=0}^{d} a_k \alpha^{k-d} = 0$$

   ce qui donne en faisant le changement de variable $j = d - k$

$$\sum_{j=0}^{d} a_{d-j} \alpha^{-j} = 0$$

   or $a_{d-j} = a_j$ comme le polynôme est palyndromique, donc on obtient

$$\sum_{j=0}^{d} a_j (\frac{1}{\alpha})^j = 0$$

   Ainsi $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine de P.

7. INFORMATIQUE

   (a) Le polynôme représenté par cette liste est $2 + 3X + 4X^2$

   (b)
```python
def simplifie(P):
    k=len(P)-1
    while P[k]==0:
        P.pop()
    return(P)
```

8.
```
def est_palyndrome(P):
    P=simplifie(P)
    for k in range(len(P)):
        if P[k]!=P[len(P)-1-k]:
            return(False)
    return(True)
```

9.
```
def evaluation(P,x):
    s=0
    for k in range(len(P)):
        s=s+P[k]*(x**k)
    return(s)
```

10. C'est la fonction `derivation1`

    On a `derivation2([2,3,4])-> [0,3,4]`

    La fonction `derivation2([2,3,4])` renvoie une erreur sur la taille de la liste.

    On obtient `derivation2([2,3,4])-> [0,4]`

11.
```
def multiplicite(P,x):
    m=0
    while evaluation(P,x)==0:
        P=derivation(P)
        m+=1
    return(m)
```