Interro 18

45 minutes

Exercice 1. On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$
$$F = \text{Vect}\,(u_1 = (1, 3, 0, 2), u_2 = (2, 7, -3, 6), u_3 = (1, 1, 6, -2))$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer une représentation cartésienne de F
4. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. [ERREUR ⚠]
   LES QUESTION SUIVANTES N ONT PLUS DE SENS
5. (a) On considère la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ formée des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ et de $\mathcal{B}_F$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. (En étant astucieux et en utilisant la question 4, c'est assez rapide)
   (b) Justifier que $\mathcal{F}$ est une base et en déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F})$
6. On considère le vecteur $u = (2, 3, 1, 2)$. Donner les coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$.
7. Soit $G = \{u + v \mid u \in E, v \in F\}$, montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension. (on pourra montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de G)

[QUESTIONS DE REMPLACEMENT] Voilà une série de questions qui pourraient les remplacer

4. Déterminer une base de $E \cap F$
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, où $f_1 \in E \cap F$, $f_2 \in E$ et $f_3 \in F$.
6. Soit $G = \{u + v \mid u \in E, v \in F\}$, montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

Exercice 2. On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$
$$F = \text{Vect}\,(u_1 = (1,3,0,2), u_2 = (2,7,-3,6), u_3 = (1,1,6,-2))$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer une représentation cartésienne de F
4. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
5. (a) On considère la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ formée des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ et de $\mathcal{B}_F$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. (En étant astucieux et en utilisant la question 4, c'est assez rapide)
   (b) Justifier que $\mathcal{F}$ est une base et en déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F})$
6. On considère le vecteur $u = (2,3,1,2)$. Donner les coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$.
7. Soit $G = \{u + v \mid u \in E, v \in F\}$, montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.