Correction Interro 18

Exercice 1. On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$
$$F = \text{Vect}\,(u_1 = (1, 3, 0, 2), u_2 = (2, 7, -3, 6), u_3 = (1, 1, 6, -2))$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer une représentation cartésienne de F
4. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. [ERREUR ⚠]
   LES QUESTION SUIVANTES N ONT PLUS DE SENS
5. (a) On considère la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ formée des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ et de $\mathcal{B}_F$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. (En étant astucieux et en utilisant la question 4, c'est assez rapide)
   (b) Justifier que $\mathcal{F}$ est une base et en déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F})$
6. On considère le vecteur $u = (2, 3, 1, 2)$. Donner les coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$.
7. Soit $G = \{u + v \mid u \in E, v \in F\}$, montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension. (on pourra montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de G)

[QUESTIONS DE REMPLACEMENT] Voilà une série de questions qui pourraient les remplacer

4. Déterminer une base de $E \cap F$
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, où $f_1 \in E \cap F$, $f_2 \in E$ et $f_3 \in F$.
6. Soit $G = \{u + v \mid u \in E, v \in F\}$, montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

Correction 1.

1. (a) On résout le système définissant les éléments de E :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 \quad + x_4 & = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1}{\iff} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 & = -x_3 \\ 2x_2 & = 4x_3 - x_4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 & = 3x_3 - x_4 \\ x_2 & = 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} E &= \{(3x_3 - x_4, 2x_3 - \frac{1}{2}x_4, x_3, x_4) \mid (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_3(3, 2, 1, 0) + x_4(-1, \frac{-1}{2}, 0, 1) \mid (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((3, 2, 1, 0), (-1, \frac{-1}{2}, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi E est un sev de $\mathbb{R}^4$ et $((3, 2, 1, 0), (-1, \frac{-1}{2}, 0, 1))$ en est une famille génératrice.

(b) Comme la famille $((3, 2, 1, 0), (-1, \frac{-1}{2}, 0, 1))$ est libre, (les <u>deux</u> vecteurs ne sont pas colinéaires) cette famille est une base de E.

$$\boxed{E \text{ est de dimension } 2}$$

2. Calculons le rang de (u_1, u_2, u_3), en calculant le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

On a

$$rg((u_1,u_2,u_3)) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi

$$\boxed{\dim(F) = 2}$$

De plus, les vecteurs (u_1, u_2) forment une famille libre : ce sont <u>deux</u> vecteurs non colinéaires, comme $\mathrm{Card}(u_1, u_2) = 2 = \dim(F)$ cette famille est donc une base de F.

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F}$$

3. Comme (u_1, u_2) est une base de F, on a $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, u = \lambda u_1 + \mu u_2$ Pour obtenir une représentation cartésienne de F, on résout ensuite le système d'inconnue (λ, μ) et de paramètre (x_1, x_2, x_3, x_4). On obtient

$$\left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ 3\lambda & +7\mu & = & x_2 \\ & -3\mu & = & x_3 \\ 2\lambda & +6\mu & = & x_4 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ & \mu & = & x_2 - 3x_1 \\ & -3\mu & = & x_3 \\ & +2\mu & = & x_4 - 2x_1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ & \mu & = & x_2 - 3x_1 \\ & 0 & = & x_3 + 3(x_2 - 3x_1) \\ & 0 & = & x_4 - 2x_1 - 2(x_2 - 3x_1) \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations donnent sont les équations de compatibilités du système, on a donc

$$\boxed{F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -9x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}}$$

4. D'après ce qui précéde :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E\cap F \iff \begin{cases} -x_1+x_2 & +x_3 & & =0\\ 4x_1-2x_2 & & +x_4 & =0\\ -9x_1+3x_2 & +x_3 & & =0\\ 4x_1-2x_2 & & +x_4 & =0\end{cases}$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_2}{\iff} \begin{cases} -x_1+x_2 & +x_3 & & =0\\ 4x_1-2x_2 & & +x_4 & =0\\ -9x_1+3x_2 & +x_3 & & =0\\ 0 & & 0 & =0\end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+4L_1\\ L_3\leftarrow L_3-9L_1}}{\iff} \begin{cases} -x_1+x_2 & +x_3 & & =0\\ 2x_2 & +4x_3 & +x_4 & =0\\ -6x_2 & -8x_3 & & =0\end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+3L_2}{\iff} \begin{cases} -x_1+x_2 & +x_3 & & =0\\ 2x_2 & +4x_3 & +x_4 & =0\\ & 4x_3 & +3x_4 & =0\end{cases}$$

$$\underset{calculs}{\iff} \begin{cases} x_1 & =\frac{1}{4}x_4\\ x_2 & =x_4\\ x_3 & =\frac{-3}{4}x_4\end{cases}$$

Ainsi

$$E\cap F=\mathrm{Vect}((\frac{1}{4},1,\frac{-3}{4},1))$$

Les questions suivantes deviennent caduques, les énoncés des questions sont faux ou n'ont pas de sens.

Questions de remplacement :

4) (Memes calculs, conclusion différentes)

$$\boxed{\text{Ainsi } (1,4,-3,4) \text{ est une base de } E\cap F}$$

5. On prend $f_1=(1,4,-3,4)$, $f_2=(3,2,1,0)$, $f_3=(1,3,0,2)$ et $f_4=(0,0,0,1)$ (seul le premier est déterminé, les autres sont choisis un peu au hasard)
   On calcule ensuite le rang de cette famille de vecteur :
   $$rg(f_1,f_2,f_3,f_4)=rg\begin{pmatrix}1&3&1&0\\4&2&3&0\\-3&1&0&0\\4&0&2&1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&3&1&0\\0&-10&-1&0\\0&10&3&0\\0&-12&-2&1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&3&1&0\\0&-10&-1&0\\0&0&2&0\\0&0&-8&10\end{pmatrix}=$$
   $$rg\begin{pmatrix}1&3&1&0\\0&-10&-1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&10\end{pmatrix}=4$$

6. Comme $0_{\mathbb{R}^4}\in E$ et $0_{\mathbb{R}^4}\in F$ donc $0_{\mathbb{R}^4}+0_{\mathbb{R}^4}=0_{\mathbb{R}^4}\in G$. Ainsi G est non vide.
   Soit $(x_1,x_2)\in G^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Comme $x_i\in G$ on a $x_1=e_1+f_1$ et $x_2=e_2+f_2$ où $e_i\in E$ et $f_i\in F$
   Ainsi
   $$\begin{aligned} x_1+\lambda x_2 &= e_1+f_1+\lambda(e_2+f_2)\\ &= e_1+\lambda e_2+(f_1+\lambda f_2)\end{aligned}$$
   Comme E et F sont des sev, $e_1+\lambda e_2\in E$ et $f_1+\lambda f_2\in F$. Ainsi
   $$x_1+\lambda x_2\in G$$
   $$\boxed{G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^4}$$

7.

Exercice 2. On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$
$$F = \text{Vect}\,(u_1 = (1,3,0,2), u_2 = (2,7,-3,6), u_3 = (1,1,6,-2))$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer une représentation cartésienne de F
4. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
5. (a) On considère la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ formée des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ et de $\mathcal{B}_F$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. (En étant astucieux et en utilisant la question 4, c'est assez rapide)
   (b) Justifier que $\mathcal{F}$ est une base et en déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F})$
6. On considère le vecteur $u = (2,3,1,2)$. Donner les coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$.
7. Soit $G = \{u + v \mid u \in E, v \in F\}$, montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

Correction 2.

1. (a) On résout le système définissant les éléments de E :

$$\left\{\begin{array}{llll} -x_1 + x_2 + & x_3 & & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ & 2x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = x_2 + x_3 \\ x_4 & = -2x_3 \end{array}\right.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} E &= \{(x_2 + x_3, x_2, x_3, -2x_3) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_2(1,1,0,0) + x_3(1,0,1,-2) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1,1,0,0), (1,0,1,-2)) \end{aligned}$$

Ainsi E est un sev de $\mathbb{R}^4$ et $((1,1,0,0),(1,0,1,-2))$ en est une famille génératrice.

(b) Comme la famille $((1,1,0,0),(1,0,1,-2))$ est libre, (les <u>deux</u> vecteurs ne sont pas colinéaires) cette famille est une base de E.

$$\boxed{E \text{ est de dimension } 2}$$

2. Calculons le rang de (u_1, u_2, u_3), en calculant le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

On a

$$rg((u_1,u_2,u_3)) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi

$$\boxed{\dim(F) = 2}$$

De plus, les vecteurs (u_1, u_2) forment une famille libre : ce sont deux vecteurs non colinéaires, comme $\mathrm{Card}(u_1, u_2) = 2 = \dim(F)$ cette famille est donc une base de F.

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F}$$

3. Comme (u_1, u_2) est une base de F, on a $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, u = \lambda u_1 + \mu u_2$
Pour obtenir une représentation cartésienne de F, on résout ensuite le système d'inconnue (λ, μ) et de paramètre (x_1, x_2, x_3, x_4). On obtient

$$\left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ 3\lambda & +7\mu & = & x_2 \\ & -3\mu & = & x_3 \\ 2\lambda & +6\mu & = & x_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ & \mu & = & x_2 - 3x_1 \\ & -3\mu & = & x_3 \\ & +2\mu & = & x_4 - 2x_1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ & \mu & = & x_2 - 3x_1 \\ & 0 & = & x_3 + 3(x_2 - 3x_1) \\ & 0 & = & x_4 - 2x_1 - 2(x_2 - 3x_1) \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont les équations de compatibilités du système, on a donc

$$\boxed{F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -9x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}}$$

4. D'après ce qui précéde :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \cap F \iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ -9x_1 + 3x_2 & +x_3 & & = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ -6x_2 & -8x_3 & & = 0 \\ 2x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -6x_2 & -8x_3 & & = 0 \\ 2x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 0 \\ & -2x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -6x_2 & -8x_3 & & = 0 \\ & 4x_3 & +3x_4 & = 0 \\ & -2x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -6x_2 & -8x_3 & & = 0 \\ & 4x_3 & +3x_4 & = 0 \\ & 0 & 5x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

Le système est de rang 4 à 4 inconnues, il admet donc une unique solution. Comme il est homogéne, cette solution est $(0, 0, 0, 0)$. Ainsi

$$\boxed{E \cap F = \{(0, 0, 0, 0)\}}$$

5. (a) Avec nos choix de $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ on obtient

$$\mathcal{F} = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2), (1, 3, 0, 2), (2, 7, -3, 6))$$

Pour montrer que cette famille est libre on peut soit faire la méthode "habituelle" soit procéder de la façon suivante.
On note $v_1=(1,1,0,0), v_2=(1,0,1,-2)$ et l'énoncé note $u_1=(1,3,0,2), u_2=(2,7,-3,6)$.
Soit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 u_1+\lambda_4 u_2=O_{\mathbb{R}^4}$$

On obtient alors

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=-(\lambda_3 u_1+\lambda_4 u_2)$$

Or comme E et F sont des sev de $\mathbb{R}^4$ on a $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2\in F$ et $-(\lambda_3 u_1+\lambda_4 u_2)\in E$ Mais comme ces deux vecteurs sont égaux on a donc

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2\in F\cap E \quad \text{et} \quad -(\lambda_3 u_1+\lambda_4 u_2)\in E\cap F$$

Ainsi

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=O_{\mathbb{R}^4\}} \quad {\scriptstyle \text{et} \quad -(\lambda_3 u_1+\lambda_4 u_2)=O_{\mathbb{R}^4}}$$

Mais comme (v_1,v_2) et (u_1,u_2) sont des familles libres, on a alors :

$$\lambda_1=\lambda_2=0 \quad \text{et} \quad \lambda_3=\lambda_4=0$$

$$\boxed{\text{Ainsi la famille } \mathcal{F} \text{ est libre}}$$

(b) $\mathcal{F}$ est une famille libre et de plus $Card(\mathcal{F})=4=\dim(\mathbb{R}^4)$.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^4}$$

6. Il faut résoudre le système

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 u_1+\lambda_4 u_2=(2,3,1,2)$$

On obtient

$$\left\{\begin{array}{lllll}\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & =2\\ \lambda_1 & & +3\lambda_3 & +7\lambda_4 & =3\\ & \lambda_2 & & -3\lambda_4 & =1\\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & +6\lambda_4 & =2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff}\left\{\begin{array}{lllll}\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & =2\\ & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & =1\\ & \lambda_2 & & -3\lambda_4 & =1\\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & +6\lambda_4 & =2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_1;L_4\leftarrow L_4-2L_2}{\iff}\left\{\begin{array}{lllll}\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & =2\\ & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & =1\\ & & +2\lambda_3 & +2\lambda_4 & =2\\ & & -2\lambda_3 & -4\lambda_4 & =0\end{array}\right.$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4+L_3}{\iff}\left\{\begin{array}{lllll}\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & =2\\ & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & =1\\ & & +2\lambda_3 & +2\lambda_4 & =2\\ & & & -2\lambda_4 & =2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4/(-2)}{\iff}\left\{\begin{array}{lllll}\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & =2\\ & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & =1\\ & & \lambda_3 & & =2\\ & & & \lambda_4 & =-1\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lllll}\lambda_1 & -2 & +2 & -2 & =2\\ & \lambda_2 & & & =-2\\ & & \lambda_3 & & =2\\ & & & \lambda_4 & =-1\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lllll}\lambda_1 & & & & =4\\ & \lambda_2 & & & =-2\\ & & \lambda_3 & & =2\\ & & & \lambda_4 & =-1\end{array}\right.$$

Ainsi la matrice de coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$ est

$$M_{\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. Comme $0_{\mathbb{R}^4} \in E$ et $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ donc $0_{\mathbb{R}^4} + 0_{\mathbb{R}^4} = 0_{\mathbb{R}^4} \in G$. Ainsi G est non vide.
Soit $(x_1, x_2) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $x_i \in G$ on a $x_1 = e_1 + f_1$ et $x_2 = e_2 + f_2$ où $e_i \in E$ et $f_i \in F$
Ainsi

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda x_2 &= e_1 + f_1 + \lambda(e_2 + f_2) \\ &= e_1 + \lambda e_2 + (f_1 + \lambda f_2) \end{aligned}$$

Comme E et F sont des sev, $e_1 + \lambda e_2 \in E$ et $f_1 + \lambda f_2 \in F$. Ainsi

$$x_1 + \lambda x_2 \in G$$

$$\boxed{G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^4}$$

8.

$$u_1 = u_1 + 0_{\mathbb{R}^4}, u_2 = u_2 + 0_{\mathbb{R}^4}, v_1 = 0_{\mathbb{R}^4} + v_1, v_2 = 0_{\mathbb{R}^4} + v_2$$

Donc

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \in G$$

Ainsi

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) \subset G$$

Comme (u_1, u_2, v_1, v_2) est une famille libre,

$$\dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 4$$

Ainsi

$$4 \leq \dim(G)$$

Or $G \subset \mathbb{R}^4$ donc $\dim(G) \leq 4$ ainsi

$$\boxed{\dim(G) = 4 \text{ et } G = \mathbb{R}^4 \text{ et}}$$