Programme de colle : Semaine 24
Mardi 22 Avril

1 Cours

1. Dérivation
   — Dérivabilité en un point et sur un intervalle.
   — Théorème de Rolle
   — Egalité des accroissements finis. (l'inégalité des accroissement n'est pas au programme, il faut redémondre ce dont on a besoin au cas par cas)
   — Dérivée d'ordre supérieur. (La formule de Liebniz n'est pas au programme)
2. Espace vectoriel – Seul l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et ses sous-espaces vectoriels sont au programme en BCPST1
   — Définition d'un espace vectoriel et stabilité par combinaison linéaire d'un sous-espace vectoriel.
   — Famille de vecteurs, Espace vectoriel engendré.
   — Famille génératrice d'un espace vectoriel.
   — Famille libre.
   — Base.
   — Dimension d'un espace vectoriel.
   — $F \subset G \Longrightarrow \dim F \leq \dim G$
   — $F \subset G$ et $\dim F = \dim G \Longrightarrow F = G$
   — Cardinal maximal d'une famille libre dans un espace de dimension p
   — Cardinal minimal d'une famille génératrice dans un espace de dimension p
   — Une famille libre à p éléments dans un espace de dimension p est une base.
   — Une famille génératrice à p éléments dans un espace de dimension p est une base.
   — Rang d'une famille de vecteurs (déf = dimension de l'espace vectoriel engendré), lien avec le rang de la matrice et du système
3. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Modélisation d'une expérience aléatoire a l'aide de de la bibliothèque `random` plus particulièrement des fonctions `randint()` et `random`

2 Exercices Types

Exercice 1. *Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

Exercice 2. *Soit g la fonction définie par :* $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} \ln(x) & si\ x > 0 \end{cases}$.

1. *Donner le domaine de définition et les limites aux bornes.*
2. *Étudier la continuité et la dérivabilité de g.*

Exercice 3. *Montrer les inégalités suivantes à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à un intervalle bien choisi.*

1. *Pour tous réels* a, h *tels que* $0 < a < a+h < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin(a+h) < \sin a + h\cos a$.
2. $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.
3. $\forall x \geq 0, \quad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ *avec* $\alpha > 1$.
4. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x}$.
5. $\forall (x,y) \in]-\infty, 0]^2, \quad |e^x - e^y| \leq |x-y|$.

Exercice 4. *Montrer que si* f *est dérivable* n *fois sur* $[a,b]$ *et admet* $n+1$ *zéros sur* $]a,b[$ *alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que :* $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 5. *Soit la fonction* f *définie sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

1. *Calculer* f' *et* f''.
2. *Montrer par récurrence l'existence, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *d'un polynôme* P_n *tel que, pour tout* $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$
Trouver une relation entre P_{n+1}, P_n *et* P_n'.
3. *Déterminer le monôme de plus haut degré de* P_n.

Exercice 6. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^2$ *?*

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\}$
3. $C = \{(x+2y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice 7. *Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :*

1. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\}$
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + z = 0\}$

Exercice 8. *Les familles suivantes de* $\mathbb{R}^3$ *sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.*

1. $u = (1,-1,0)$, $v = (2,1,-1)$ *et* $w = (1,5,-1)$
2. $u = (1,1,2)$, $v = (2,1,0)$ *et* $w = (3,1,\lambda)$ λ *paramètre réel.*
3. $u = (1,0,-2)$, $v = (2,3,1)$ *et* $w = (4,-2,1)$
4. $u = (1,1,-1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (-1,1,1)$ *et* $t = (1,1,1)$

Exercice 9. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* E. *Donner une base de* F *et sa dimension.*

1. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 4z = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x+2y-2z, -x+3y-z, x+7y-5z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
4. $E = \mathbb{R}^4$ *et* $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2xy + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\}$ *avec* a *un paramètre réel.*

Exercice 10. *Déterminer le rang de la famille* (u_1, u_2, u_3, u_4) *avec* $u_1 = (\lambda,1,1,1)$, $u_2 = (1,\lambda,1,1)$, $u_3 = (1,1,\lambda,1)$ *et* $u_4 = (1,1,1,\lambda)$. *Discuter selon les valeurs de* $\lambda \in \mathbb{R}$.