Table des matières

Chapitre 1 : Nombres

♥ : A connaitre absolument ! ♡ : A connaitre ou à savoir retrouver vite (ie. - de 1 minute). ⚙ : A travailler le temps qu'il faut.

Evidemment tout le cours est à connaitre... mais bon il est parfois difficile d'avoir le recul sur les choses les plus importantes.

I Nombres entiers

I. 1 Axiome de récurrence

Définition 1. *On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : 0,1...*
On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs : ... -1, 0, 1...

L'ensemble des entiers naturels est directement lié au principe de récurrence, que l'on peut considérer comme la définition même des entiers naturels [1] : 0 fait partie de $\mathbb{N}$, si un nombre appartient à $\mathbb{N}$ il a un unique successeur.

Théorème 2 (Axiome de récurrence)**.** *Si $P(n)$ est une proposition telle que :*
- *$P(0)$ est vraie,*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$,*

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conseil rédactionnel ♥ :
- **On définit clairement la propriété à démontrer :**
  Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: ......
- **Initialisation :** pour $n = n_0$:
  On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $n \geq n_0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  ⚠ N'oubliez pas de signaler l'endroit où vous utilisez l'hypothèse de récurrence.
- **Conclusion :**
  Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 1. ♡ *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Initialisation : Pour $n = 0$ on a d'une part :$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$. D'autre part on a : $\frac{0(0+1)(2*0+1)}{6} = 0$.
La propriété P est donc vraie au rang 0.

Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons le membre de gauche de l'égalité de $P(n+1)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

1. Axiomatique de Peano

Par hypothése de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Mettons $(n+1)$ en facteur. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)}{6}.\\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}.\end{aligned}$$

Or $(2n^2+7n+6) = (2n+3)(n+2) = (2(n+1)+1)((n+1)+1)$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

La propriété P est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

□

⚠Vous verrez des récurrences toutes l'année et l'année prochaine. Sachez les faire correctement ! Dans quasiment tous les sujets de concours, il y aura (au moins) une récurrence.

⚠On évitera d'utiliser l'abréviations 'HR' dans les copies, même si je me permettrais de l'utiliser parfois dans les TD.

I. 2 Récurrence dite « forte »

Parfois afin de prouver un résultat par récurrence il ne suffit pas de supposer une propriété vraie au rang n, mais plutot de la supposer vraie pour tout entier inférieur ou égal à n. Plus précisément, on change la propriété P à prouver par : $\widetilde{P}(n)$: "$\forall k \leq n, \, , P(k)$".

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- Montrer en utilisant une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

Démonstration. On souhaite prouver la propriété Q définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $Q(n)$: « $u_n \leq 2$ » . On note P la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P(n)$: « $\forall k \leq n$, $u_k \leq 0$ » [2]

2.
— Remarquons que la propriété $P(n)$ implique la propriété $Q(n)$. En effet, si on a $P(n)$ alors pour tout $k \leq n$, $u_k \leq 2$, en particulier $u_n \leq 2$ c'est-à-dire $Q(n)$. C'est pour cela qu'on parle de récurrence "forte", la propriété supposée dans l'hypothèse de récurrence est plus "forte" que la propriété que l'on souhaite démontrer.
En contre-partie, lorsqu'on utilise l'hypothèse de récurrence on a sous la main une propriété plus forte, ce qui permet de conclure.
— La propriété $P(n+1)$ c'est pareil que les deux propriétés $P(n)$ et $Q(n+1)$ prises en même temps. En effet, montrer que pour tout $k \leq n+1$ on a $u_k \leq 2$. revient à montrer que

$$\left\{\begin{array}{l} \forall k \leq n,\, u_k \leq 2 \quad \text{ie. } P(n) \\ \text{ET} \\ u_{n+1} \leq 2 \quad \text{ie. } Q(n+1) \end{array}\right.$$

On va prouver P par récurrence sur l'entier $n \geq 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$ on a d'une part : $u_0 = 2 \leq 2$. La propriété P est donc vraie au rang 0.

Hérédité :

Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k. \text{ (note}^3\text{)}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\forall k \leq n$, $u_k \leq 2$ donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2 = 2(n+1)$ (note[4]) Ainsi,

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}(2(n+1)) = 2.$$

On a donc prouvé $P(n+1)$

Conclusion :

Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{u_n \leq 2}$$

□

Remarque

- Pourquoi a-t-on besoin d'une récurrence forte ici ? Parce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie avec tous les termes précédents. Si on suppose seulement une propriété sur u_n et pas sur tous les u_k pour $k \leq n$, on ne pourra rien dire sur la somme $u_0 + u_1 + \cdot + u_n$, car on ne saura pas controler les termes $u_0, u_1, ...u_{n-1}$ au moment d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Essayez par vous-même !

Ce qui a de « miraculeux »dans la récurrence forte, c'est que grâce à l'hypothèse de récurrence $P(n)$, afin de prouver $P(n+1)$ on a déjà fait toute une partie du travail sans rien faire ! En effet, rappelons que $P(n+1) \iff (P(n) ET Q(n+1))$, en supposant $P(n)$ il suffit de montrer $Q(n+1)$ pour montrer $P(n+1)$.

I. 3 Quelques (petits) rappels d'arithmétiques sur les entiers

Cette section n'est pas au programme, mais les notions de divisions euclidiennes, de divisibilité, sont parfois implicitement utilisés dans les exercices (parfois pour les oraux, avec des exercices du type "Quelle est la probabilités que a divise b ?"...)

Théorème 3 (Division Euclidienne)**.** *Soit a, b deux entiers naturels. On suppose que b est différent de* 0*. Il existe une unique pair d'entiers (q, r) satifaisant :*

1. $a = bq + r$
2. $0 \leq r < b$.

On verra un peu plus tard la preuve de ce résultat... Chapitre Eléments de logique.

Définition 4. *-On dit que b divise a, ou que a est divisible par b, si il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$. Ainsi* 1 *divise tous les nombres*
- Un nombre premier est un nombre (différent de 1) divisible seulement par 1 et par lui même.

3. $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k. = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + ... + u_n)$

4. Voilà ce que je viens d'écrire en développant les sommes Par hypothése de récurrence, on a $u_0 \leq 2$, $u_1 \leq 2$ ... $u_n \leq 2$ donc $(u_0 + u_1 + ... + u_n) \leq (2 + 2 + ... + 2) = 2(n+1)$

C'est ici qu'on utilise l'hypothèse forte. En effet, si on avait supposé seulement « $u_n \leq 2$ » on n'aurait pas pu majorer $(u_0 + u_1 + ... + u_n)$, car on ne saurait rien sur les termes $u_1, ..., u_{n-1}$.

Remarque :

- Un nombre divisible par 2 est dit *pair*. Pour tout nombre pair $n \in \mathbb{N}$, il existe m tel que $n = 2m$. Un nombre entier qui n'est pas divisible par 2 est un nombre *impair*. Pour tout nombre pair $n \in \mathbb{N}$, il existe m tel que $n = 2m + 1$.

Exercice 2. *Montrer que pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair alors n est pair.*

Démonstration. On va montrer ce résultat par *contraposée*. C'est-à-dire que l'on va montrer que si la conclusion est fausse alors l'hypothèse est fausse. Nous reverrons ce procédé dans le chapitre de logique.

La conclusion est fausse se lit n n'est pas pair, soit n est impair. Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m + 1$. On a alors,

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

Donc n^2 est impair, autrement dit, n^2 n'est pas pair. Ce qui conclut par contraposée. □

Théorème 5. *Il existe une infinité de nombre premiers.*

Théorème 6. *Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique k-uple $(p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_k)$ de nombre premiers tels que :*

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i$$

Soit p, q deux nombres entiers non nul. Soit $p = \prod_{i=1}^{k} p_i$ et $q = \prod_{i=1}^{\ell} q_i$ les décompositions en nombre premiers de p et q. On dit que p et q sont premiers entre eux si $\{p_i \mid i \in [\![1,k]\!]\} \cap \{q_j \mid j \in [\![1,\ell]\!]\} = \emptyset$.

I. 4 Rappels sur l'écriture $\sum$ et $\prod$

Cette partie est un bref rappel afin de pouvoir aborder les exercices proposés en TD et en colles avec plus de sérénité. Un chapitre plus conséquent sera consacré à l'étude des sommes et des produits.

I. 4. a Notation

Définition 7. *Soient $a_0, ..., a_n$ des nombres. La notation $\sum_{k=0}^{n} a_k$ signifie $a_0 + a_1 + ... + a_n$.*

Par convention, une somme ayant un ensemble d'incides vide est nulle.

Définition 8. *Soient $a_0, ..., a_n$ des nombres. La notation $\prod_{k=0}^{n} a_k$ signifie $a_0 \times a_1 \times ... \times a_n$.*

Par convention, un produit ayant un ensemble d'incides vide vaut 1.

Exemples :

- ♥ Si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$, on a alors $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 2 = 3$, $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$,..., $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- ♥ Si on note $P_n = \prod_{k=1}^{n} k$, on a alors $P_0 = 1$, $P_1 = 1$, $P_2 = 1 \times 2 = 2$, $P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$,..., $P_n = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n = n!$.

Remarques

- Ici k est une variable « muette » ce n'est qu'une convention d'écriture pour simplifier ce que l'on veut dire : $\sum_{k=0}^{n} a_k$ NE dépend PAS de k mais dépend de n (à méditer...).
- Les nombres a_k ne sont pas nécessairement tous différents : $\sum_{k=0}^{n} 1$ signifie $= 1 + 1 + 1 + ... + 1$, avec $(n+1)$ fois le terme 1. En d'autres termes, $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$.

Exercice 3. *Que vaut* $\sum_{k=0}^{5}(2k+1)$ *? Que vaut* $\prod_{k=2}^{5} \exp(2k+1)$ *?*

I. 4. b Règles de calcul

Comme le symbole $\sum$ n'est rien d'autre qu'une simplification d'un point de vue de la notation qu'une grosse addition, les règles de calculs habituelles s'appliquent, par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} 3a_k = 3\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right).$$

Ici on a juste écrit :

$$3a_0 + 3a_1 + ... + 3a_n = 3(a_0 + a_1 + ... + a_n).$$

A cet effet, on utilisera des parenthèses pour expliciter l'appartenance ou non dans un symbole somme :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + 1 \neq \sum_{k=0}^{n} (k+1).$$

Plus généralement, si on a deux n-uplets de nombres : $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$, et λ un nombre donné, on a alors :

Proposition 9.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \lambda b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Démonstration. Récurrence ! □

Remarques

- On appelle cette propriété, la *linéarité* de la somme.
- Dans l'expression $\sum_{k=1}^{n} a_k + \lambda b_k$ il n'y a pas besoin de parenthèses, en effet comme l'indice k apparait dans la suite b_k, ce terme appartient nécessairement à la somme. La variable k n'a pas d'existence en dehors de la somme. Cependant, pour des raisons de lisibilité, il n'est pas déraisonable d'écrire $\sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)$.

I. 4. c Changement de variables

Au cas où on l'aurait oublier, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ NE dépend PAS de k, on peut donc réécrire cette somme en décalant cette indice :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}.$$

Les nombres a_{k-1} pour k parcourant $[\![1, n+1]\!]$, sont les mêmes que les nombres a_k pour k parcourant $[\![0, n]\!]$:

$$\{k \mid k \in [\![0, n]\!]\} = \{k-1 \mid k \in [\![1, n+1]\!]\}.$$

Exercice 4. ♡ ⚙ *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ pour un couple de nombre a, b que l'on déterminera. En déduire la valeur de*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

I. 4. d Sommes doubles

Remarquez aussi que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2.$$

La somme de gauche vaut $a_0^2 + a_1^2 + ... + a_n^2$. La somme de droite est le produit de deux grosses sommes :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = (a_0 + a_1 + ... + a_n)(a_0 + a_1 + ... + a_n).$$

Il n'y a pas de façon beaucoup plus simple de l'écrire. On peut envisager une somme à deux indices :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \\
&= \sum_{k,j \in [\![0,n]\!]} a_k a_j \\
&= \sum_{0 \leq k < j \leq n} a_k a_j + \sum_{0 \leq j < k \leq n} a_k a_j + \sum_{0 \leq k = j \leq n} a_k a_j \\
&= 2 \sum_{0 \leq k < j \leq n} a_k a_j + \sum_{0 \leq k \leq n} a_k^2.
\end{aligned}$$

Exercice 5. ⚙ *En appliquant les calculs précédents à $a_k = k$ montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

(ne pas faire de récurrence).

II Nombres rationnels

La division ne permet pas de rester dans l'ensemble des entiers naturels, on introduit pour cela l'ensemble des rationnels.

Définition 10. *L'ensemble des rationnels est l'ensemble noté $\mathbb{Q}$ défini par :*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Remarque On écrira toujours une fraction sous forme réduite, c'est-à-dire, p et q premier entre eux, cf 6.

Rappelons que pour additionner deux fractions il faut qu'elles soient au même dénominateur...

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_2}{q_1 q_2}.$$

Exercice 6. ♡ *Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.*

III Nombres réels

Les nombres rationnels permettent d'additioner, soustraire, multiplier et diviser... Pourquoi chercher plus loin ? Le philosophe Hippase de métaponte (± 500 av JC.) montre que l'hypothénuse d'un triangle rectangle isocèle dont les cotés valent 1, n'est pas un nombre rationnel.

Bien plus tard, Dedekind (1831-1916) et Cantor (1845-1918) proposent une construction des nombres réels de deux manières différentes. Nous ne rentrerons pas dans les détails, mais soulignons qu'un des points importants est l'existence de la borne supérieure (Voir section III. 2). L'ensemble $\{x^2 \leq 2 \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$ n'admet pas de borne supérieure dans l'ensemble des rationnels.

Nous supposerons donc qu'il existe un ensemble, dit des nombre réel, et noté $\mathbb{R}$, qui vérifie les différentes propriétés de cette section.

III. 1 Intervalles

Sur $\mathbb{R}$ il existe un ordre qui permet de comparer deux nombres réels, c'est-à-dire de savoir lequel est supérieur ou égal à l'autre.

Définition 11. *Ordre sur $\mathbb{R}$:*
- $x < y \iff$ *si x est strictement inférieur à y.*
- $x \leq y \iff$ *si x est inférieur à y ou bien égal.*

⚠ Sur $\mathbb{C}$ il n'y a pas de relation d'ordre qui étend celle de $\mathbb{R}$ (et compatible avec les opérations classiques).

Définition 12. *Intervalle de $\mathbb{R}$: ce sont les ensembles de la forme*
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$. *Appelé parfois « segment a,b »ou « intervalle fermé a,b ».*
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$.
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$.
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$. *Appelé parfois « intervalle ouvert a,b ».*
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$.
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$.
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$.
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$.
- $]-\infty,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\}$.

où a et b sont deux réels quelconques.

Remarques :
- L'intervalle vide est noté $\emptyset$. Pour tout réel a, on a : $]a,a[= \emptyset$.

III. 2 Maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure

Définition 13. *Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit majoré si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$.*
Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit minoré si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $x \geq m$.
Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit borné si il est majoré et minoré.

Soit E un ensemble majoré, un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$ $x \leq M$ s'appelle un majorant de E.

Soit E un ensemble borné, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$:

$$|x| \leq M.$$

Exercice 7. *Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il est majoré, minoré, borné. Et donner lorsque cela a un sens l'ensemble des majorants et des minorants :*
- $A_1 = [1,2[$
- $B_1 =]-\infty,-1]$
- $C_1 =]2,+\infty[$
- $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$
- $D = \{2,4,6,9\}$
- $E = \{0,1\} \cup [2,3[$

Définition 14. *Soit E un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. On appelle borne supérieure de E le plus petit des majorants. On le note $\sup_{x \in E}$.*

Soit E un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$. On appelle borne inférieure de E le plus grand des minorants. On le note $\inf_{x \in E}$.

Théorème 15. ♡ *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une unique borne supérieure.*

Exemples :
- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}$ est un ensemble majoré. Sa borne supérieure vaut $\sqrt{2}$.

Quantification de la borne supérieure La borne supérieure d'un ensemble majoré est l'unique réel M vérifiant
- — $\forall x \in E$, $x \leq M$
- — $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in E$, $M - \epsilon < x$

Exercice 8. *Montrer l'unicité de la borne supérieure.*

Définition 16. *Soit E un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Si la borne supérieure* $\sup_{x\in E}$ *appartient à E on la note alors* $\max_E$ *et on l'appelle maximum.*

Soit E un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$. Si la borne inférieure $\sup_{x\in E}$ *appartient à E on la note alors* $\min_E$ *et on l'appelle minimum.*

Exemples :

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 2\}$ est un ensemble minoré. Sa borne supérieure vaut $-\sqrt{2}$, c'est son minimum.

Remarque de culture générale : Tout ce que l'on vient de dire, à part le Théorème 15, s'applique aux nombres rationels et c'est grâce à la propriété de la borne supérieure que l'on contruit formellement les réels :

Définition 17. *On appelle ensemble réels, noté $\mathbb{R}$, un ensemble qui contient $\mathbb{Q}$ et tel que :*
- *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
- *Tout ensemble majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*

La définition de la densité signifie qu'entre deux nombres réels on peut toujours trouver un nombre rationel :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x < y, \exists q \in \mathbb{Q} \quad x < q < y.$$

III. 3 Quelques fonctions à bien connaitre

On répertorie ici quelques propriétés de fonctions : valeur absolue, partie entiére et exposants.

III. 3. a Valeur absolue

Définition 18. *La fonction* valeur absolue *est notée $|\cdot| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et définie par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

- En particulier, la fonction valeur absolue est toujours positive. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y sur la droite réelle.
- C'est une trivialité que $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Proposition 19. *Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :*
1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. *Si $y \neq 0$ alors,* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration. 1. Evident.

2. Disjonction de cas.

3. Poser $y' = \frac{1}{y}$ et appliquer 1.

$\square$

Proposition 20. ♡ *Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $\epsilon > 0$ un réel strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$|x-a| \leq \epsilon \iff a-\epsilon \leq x \leq a+\epsilon \iff x \in [a-\epsilon, a+\epsilon].$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, l'inégalité $|x| \leq \epsilon$ est équivalente à $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ ou a $x \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Proposition 21 (Inégalité triangulaire ♥). *Soit, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration. Solution 1 : Disjonction de cas.
Solution 2 : On passe l'inégalité au carré. $\square$

Corollaire ♡ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y|$$

Démonstration. On pose $x' = x$ et $y' = y - x$. On a alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$|y| = |x'+y'| \leq |x'| + |y'| = |x| + |y-x|.$$

D'où, $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$. L'inégalité $-|y| + |x| \leq |x-y|$, se montre de la même façon en posant $x' = x - y$ et $y' = y$.

$\square$

Exercice 9. *Résoudre* $|x-1| = 2x+3$.

Exercice 10. *Résoudre* $x^2 = |x|$.

Exercice 11. *Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ on a :*

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver et montrer une formule similaire pour $\max(x,y)$.

III. 3. b Partie entière

Définition 22. *La fonction* partie entière *est notée* $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$ *et définie par :*

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

Remarques :

- La fonction partie entière est parfois notée $E(\cdot)$. On évitera cette notation afin de ne pas la confondre avec l'espèrance d'une variable aléatoire, cf Chapitre Probabilité.
- La fonction partie entière et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle n'est pas continue aux poins entiers.

Exemples :

- $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$
- $\lfloor 2.2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.2 \rfloor = -3$
- $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Proposition 23. ♥ *La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :*

$$n \leq x < n + 1.$$

Remarque :

- J'ai choisi de définir la fonction partie entière avec la Définition 22 et de prouver la Proposition 23. On aurait pu faire l'inverse : définir la partie entière de x comme l'unique entier n vérifiant l'équation $n \leq x < n + 1$ puis prouver qu'elle vérifie $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}$.

Démonstration. □

Exercice 12. ♡ *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Exercice 13. ⚙ *Calculer la limite de $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.*

III. 3. c Exposants, racine carrée

Définition 24. *Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction* puissance n *est notée $\cdot^n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et définie par :*

$$x^n = \prod_{k=1}^{n} x = x \times x \times ... \times x \qquad n \text{ fois.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction puissance $-n$ pour tout $x \neq 0$ par :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Remarque

- Par convention $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cf section I. 4.
- $0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. 0^{-n} n'est pas défini pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 25. ♡ *Inégalités remarquables. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Exercice 14. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:*

- *Retrouver $(a-b)^3$.*
- *Montrer que $ab \leq \frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2$.*

Proposition 26. *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, non nuls si besoin, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ on a :*
- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^n \times x^m = x^{n+m}$ *et* $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

Exercice 15. ❤ *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Définition 27. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^2 = x$.*
Ce nombre est appelé racine carrée de x, et est noté $\sqrt{x}$.

Remarques :
- Par définition, pour tout $x \geq 0$ $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x}^2 = x$.

Exemples :
- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \geq 0}}}$,
$$(\sqrt{x})^2 = x.$$
- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \geq 0}}}$,
$$\sqrt{x^2} = x.$$
- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}}$,
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Exercice 16. ⚙ *Résoudre*

$$\sqrt{3x-1} = x$$
$$\sqrt{1-3x} = x$$
$$\sqrt{1-3x} = -x$$

On verra plus en détail dans un chapitre ultérieur le lien avec l'exponentielle. Pour rappel on a :

Proposition 28. ♡ *Pour tout $x > 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ on a*

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)).$$

Remarque :
Il est parfois plus simple de passer à la notation exponentielle pour faire les calculs. L'exemple le plus flagrant étant le calcul de

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Exercice 17. *Calculer* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

IV Inégalités

On conclue ce chapitre par quelques conseils sur la manipulation des inégalités, et la résolution d'(in-)équations. Cette partie est très importantes. Dans beaucoup de sujets de concours il vous sera demander à un moment ou un autre de prouver une inégalité.

IV. 1 Rappel des règles de calculs sur les inégalités

Transitivité :

Proposition 29. *Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Si* $x \leq y$ *et* $y \leq z$ *alors* $x \leq z$.

Ajouter (ou soustraire) des deux côtés un même terme conserve l'équivalence.

Inégalités et addition :

Proposition 30.
- *Addition d'un même terme :* $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \leq y \Longleftrightarrow x + z \leq y + z.$
- *Addition des inégalités :* $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4, \quad \left.\begin{array}{ccc} x & \leq & y \\ x' & \leq & y' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x + x' \leq y + y'$

Inégalités et multiplication :

Proposition 31.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x \ \leq \ y \ \Leftrightarrow \forall \lambda > 0, \ \lambda x \leq \lambda y \Leftrightarrow \forall \lambda < 0, \ \lambda x \geq \lambda y$$

⚠ Quand on multiplie une inégalité on vérifie TOUJOURS le signe (et la non nullité) du coefficient multiplicateur. Si on ne le connait pas on ne peut pas assurer l'équivalence des inégalités et la preuve est fausse. Au pire, on peut essayer une disjonction de cas.

Inégalités et passage à l'inverse :

Proposition 32. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$.
- *Si* $x \geq y > 0$ *alors* $0 < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y}$
- *Si* $0 > x \geq y$ *alors* $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y} < 0$
- *Si* $x > 0$ *et* $y < 0$ *alors* $\dfrac{1}{x} < 0 < \dfrac{1}{y}$

Inégalités et passage à la limite : Pour rappel, on verra ca plus en détail dans un chapitre ultérieur.

Proposition 33. *Soit* f, g *deux fonctions continues sur* $[a, b]$. *Si pour tout* $x \in [a, b[$, $f(x) < g(x)$ *(ou* $f(x) \leq g(x)$*) alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

IV. 2 Résolutions d'inéquations

Une bonne nouvelle : de manière générale on ne sait que résoudre les inéquations polynomiales de degré au plus 2. Il faut voir toutes les autres inéquations que l'on sait résoudre comme des exceptions et non la règle.

Mauvaise nouvelle, il y a un certain nombre d'exceptions que l'on peut vous demander de savoir résoudre. Ces exceptions peuvent se ranger dans deux grandes catégories : celles où l'on peut se ramener aux (in)-équations polynomiales de degré inférieur à 2 par des manipulations algébriques (changement de variables, passage au carrés quand on a des racines...) et celles où l'on étudie une fonction (eg.

montrer que $\ln(x+1) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$). Cette deuxième catégorie forme une classe de questions classiques des écrits de concours.

On ne connait uniquement le signe d'un produit. On ne sait pas résoudre *a priori* des inégalités du type $f(x) \geq g(x)$ ou $f(x) - g(x) \geq 0$. La bonne et unique façon de connaitre le signe d'une expression et d'obtenir un produit dont on connait le signe de chaque terme.

IV. 2. a Rappel sur les équations polynomiales d'ordre 2

Définition 34. *Soit $aX^2 + bX + c$ un polynome de degré 2 à coefficients réels. On appelle discriminant et l'on note Δ la quantité $\Delta := b^2 - 4ac$.*

Proposition 35. *Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynome de degré 2 à coefficients réels.*
- *Si $\Delta > 0$, les racines de P sont réelles, distinctes et valent $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.*
- *Si $\Delta < 0$, les racines de P sont complexes conjuquées et valent $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*
- *Si $\Delta = 0$, P n'admet qu'une seule racine qui vaut : $\dfrac{-b}{2a}$.*

Il est souvent utile de connaitre les propriétés suivantes sur les racines des polynomes :

Proposition 36. *Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynome de degré 2 à coefficients réels. On note r_1, r_2 les deux racines (possiblement égales) de P (comprendre $r_1 = r_2$ si $\Delta = 0$). On a alors :*

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$$

$$r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

En particulier, si $a = 1$, on trouve

$$r_1 + r_2 = -b$$

$$r_1 r_2 = c$$

Comment résoudre une inéquation polynomiale de degrè 2 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ trois réels. On suppose que $a \neq 0$ et on considère l'inéquation

$$ax^2 + bx + c > 0. \tag{1}$$

Quitte à multiplier par -1 (et changer le sens de l'inégalité dans ce cas) on suppose que $a > 0$. On a alors trois cas selon la valeur du discriminant du polynome $P(X) := aX^2 + bX + c$

- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ où r_i, $i \in \{1, 2\}$, sont les deux racines distinctes de P. Quitte à échanger r_1 et r_2 on peut supposer que $r_1 < r_2$.
- Si $\Delta < 0$ alors P n'a pas de racine réelle. Ainsi $P(x)$ est du même signe que a sur $\mathbb{R}$. Si $a > 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$ax^2 + bx + c > 0.$$
- Si $\Delta = 0$ alors P a une unique racine r_0 et $P(X) = a(X - r_0)^2$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$
Et $P(x) = 0$ si et seulement si $x = r_0$

IV. 2. b Rappel sur

IV. 3 Résolution des équations et inéquations de type polynomiale

Culture générale : Evariste Galois a montré en 1830, qu'il n'était pas possible de trouver une formule générale pour trouver les racines de tous les polynômes dès que leur degré est supérieur à 5. Il existe des formules pour les polynôme de degré 3 et 4, qui sont relativement compliquées et peu intéressantes finalement.

Ainsi, pour résoudre une (in-)équation polynomiale de degré supérieur ou égal à 3, on cherchera une "racine évidente", r_0 c'est-à-dire une solution de $P(x) = 0$, en regardant $x = -1, 0$ ou 1.

Ensuite on factorisera le polynome par $X - r_0$, on recommencera la procédure jusqu'à obtenir un polynôme de degré inférieur à 2. Le maitre mot est la

$$\boxed{\textbf{FACTORISATION}}.$$

Exemple :
- Résoudre $x^3 - x^2 + x - 1 > 0$.

Parfois, (quand le polynôme a "beaucoup de symmetries") on peut aussi essayer de se ramener à une équation polynomiale de degré 2 à l'aide d'un changement de variable

Exemple :
- Résoudre $x^8 - 6x^4 + 8 \leq 0$.

IV. 4 Résolution des inéquations avec des produits et des quotients

Comme je l'ai rappelé en introduction, on ne sait pas résoudre des inégalités lorsqu'il y a des sommes. On ne sait résoudre les inégalités que sous la forme de produit (et/ou de quotient)

Le maitre mot est la

$$\boxed{\textbf{FACTORISATION}}.$$

Soient f_1, f_2 deux fonctions, dont on connait le signe sur $\mathbb{R}$.

- Supposons $f_1 \geq 0$ sur un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, on a $f_1(x) \geq 0$) et $f_1 < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus I$.
- Supposons $f_2 \geq 0$ sur un sous-ensemble $J \subset \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, on a $f_2(x) \geq 0$) et $f_2 < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus J$.

Alors on connait le signe de $f_1 \times f_2$ sur $\mathbb{R}$:
— Pour tout $x \in I \cap J$, $f_1(x)f_2(x) \geq 0$.
— Pour tout $x \in I \cap (\mathbb{R} \setminus J) \cup J \cap (\mathbb{R} \setminus I)$, $f_1(x)f_2(x) < 0$.
— Pour tout $x \in (\mathbb{R} \setminus I) \cap (\mathbb{R} \setminus J)$, $f_1(x)f_2(x) > 0$.

Exercice 18. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\frac{2x}{4x^2 - 1} \leq \frac{2x + 1}{4x^2 - 4x + 1}.$$

IV. 5 Transformer les équations et inéquations pour se ramener à des équations et inéqu

Lorsque l'équation ou l'inéquation n'est pas de type polynomiale (c'est-à-dire avec uniquement des puissances de x au numérateur et au dénominateur), on la transforme pour ne plus avoir ni logarithme, ni exponentielle, ni racine carrée, ni valeur absolue... On récapitule ici les différentes méthodes que l'on peut utiliser.

❶ Utiliser les propriétés du $\ln$, $\exp$, puissances :

Propriétés du logarithme ($a>0,\ b>0$) :	Propriétés de l'exponentielle :
• $\ln(ab) =$	• $e^a e^b =$
• $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) =$	• $\dfrac{e^a}{e^b} =$
• $\ln(a^p) =$	• $(e^a)^b =$
• La fonction logarithme est	• La fonction exponentielle est ....

Exercice 19. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*

1. $\ln(\sqrt{x+1}) < \ln(3+x) - \dfrac{1}{2}\ln(2)$
2. $\ln(2x+1) - \ln(x-3) \leq 0$
3. $9^x - 5^{x+2} = 5^x - 3^{2x+1}$
4. $2^{x+3} < 4^{2-x}$
5. $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$
6. $(e - e^{2x})(e^x - 1) > 0$
7. $e^{\frac{x-1}{x+3}} > e^2$
8. $e^{x+1}e^{3x-4} > 1$

❷ Élever au carré :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- $a = b \implies a^2 = b^2$ est vrai ....
- $a = b \iff a^2 = b^2$ est vrai ....
- $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$ est vrai ....
- $a \leq b \iff a^2 \geq b^2$ est vrai ....

Exercice 20. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*

1. $\sqrt{x+7} = 5 - x$
2. $\sqrt{x^2+2x} < x+1$
3. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \geq 5$
4. $\sqrt{2x^2 - x - 1} > x - \dfrac{1}{2}$
5. $\sqrt{\dfrac{6x-11}{3x-2}} \leq \dfrac{1}{x}$

❸ Utiliser un changement de variable :

Poser un changement de variable de type $X = e^x$, $X = \ln(x)$, $X = a^x$, $X = \sqrt{x}$...
pour faire apparaître des termes de type polynomiaux.

Exercice 21. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*

1. $e^x + e^{x+1} > e^{2x} + e$
2. $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 \leq 0$
3. $x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4 > 0$
4. $e^{3x} - e^{2x} - e^{x+1} + e \leq 0.$
5. $\dfrac{e^x - 1}{e^x - e^2} < \dfrac{1}{e^2}$
6. $2^{4x} - 3 \times 2^{2x+1} + 2^3 < 0$
7. $\sqrt{9^x - 1} > 3^x - 2$

❹ Enlever les valeurs absolues :

- Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qui est à l'intérieur.
  $\Longrightarrow$ Étude de cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur de la valeur absolue.

Exercice 22. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*

1. $|-x-1| + 4 = |2x+1| - 5x + 1$
2. $|3-x| > |x+2|$
3. $|x-1| + |x+2| < 3$
4. $|x^2 - 2x - 5| > x - 7$

IV. 6 Résolution d'inéquations par une étude de fonction

C'est une méthode très classique pour résoudre les (in-)équations qui ne sont pas des équations polynomiales. L'idée est la suivante, on dispose d'une inégalité à prouver du type

$$f(x) \geq a$$

où f est une fonction est a un réel.

Dans ce cas on étudie la fonction différence : $d(x) := f(x) - a$ et on espère très très fort que l'on arrive à $d(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Evidemment, les exercices sont généralement fait de telle sorte pour qu'il n'y ait pas tant besoin d'espèrer et que l'on va bien obtenir l'inégalité demandée.

La méthode est de toute facon intéressante lorsque l'on veut savoir comment se comporte une expression : étudier la fonction est LA première solution à avoir en tête.

Exemples :

- Montrer que $\forall x > 0$, $\ln(x+1) \leq x$.
- Montrer que $\forall x > 0$, $x + \dfrac{1}{x^2} \geq 2^{1/3} + \dfrac{1}{4^{1/3}}$.

Exercice 23. *Résoudre sur* $\mathbb{R}^+$ $x + \dfrac{1}{x} = 2$.

V Nombres complexes

V. 1 Forme cartésienne

Définition 37. *L'enesemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres :*

$$\mathbb{C} := \{x + iy \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

où i est un nombre spécial vérifiant $i^2 = -1$.

Remarques :

- Cette notation s'appelle la forme **cartésienne** ou **algébrique** d'un nombre complexe.
- Deux nombres complexes sont égaux si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Définition 38. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On note*

$$\mathfrak{Re}(z) = x \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = y$$

On appelle respectivement ces nombres, ***partie réelle*** *et* ***partie imaginaire*** *de z.*

Remarques :

- Lorsque $\mathfrak{Im}(z) = 0$, z est un nombre **réel**.
- Lorsque $\mathfrak{Re}(z) = 0$, z est un nombre **imaginaire pur**. On note

  $$i\mathbb{R} := \{iy \,|\, y \in \mathbb{R}\},$$

  l'ensemble des imaginaires purs.

Les calculs sur les nombres complexes généralisent naturellement ceux sur les réels avec la condition $i^2 = -1$

Proposition 39. *L'addition sur les nombres complexes vaut :*

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$$

La multiplication sur les nombres complexes est définie par :

$$(x+iy)\times(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$$

Exemples : Calculer $(1+5i)(3+i)$.

Proposition 40. *Soit* $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$*, on a :*

$$\begin{array}{lcl}\mathfrak{Re}(z+z')=\mathfrak{Re}(z)+\mathfrak{Re}(z') & \textit{et} & \mathfrak{Re}(\lambda z)=\lambda\mathfrak{Re}(z)\\ \mathfrak{Im}(z+z')=\mathfrak{Im}(z)+\mathfrak{Im}(z') & \textit{et} & \mathfrak{Im}(\lambda z)=\lambda\mathfrak{Im}(z)\end{array}$$

Remarques :

- ⚠ En général $\mathfrak{Re}(zz')\neq\mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z')$ et $\mathfrak{Im}(zz')\neq\mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(z')$

V. 1. a Interprétation graphique

A l'instar des nombres réels qui s'identifient à la droite, les nombres complexes s'identifient au plan.

Définition 41. *On associe à chaque nombre complexe* $z\in\mathbb{C}$ *le point de* $\mathbb{R}^2$ *de coordonnées* $(\mathfrak{Re}(z),\mathfrak{Im}(z))$.
Inversement, pour tout point A *(ou vecteur* u*) de* $\mathbb{R}^2$*, de coordonnées* $A=(x_A,y_A)$ *(resp* $u=(x_u,y_u)$ *) on associe le nombre complexe* $z=x_A+iy_A$ *(resp.* $z=x_u+iy_u$*). On appelle* ***affixe*** *de* A *(resp. de* u*) ce nombre.*

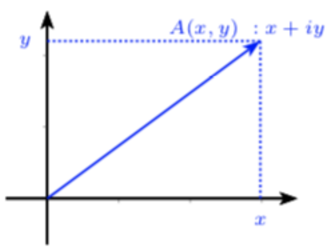
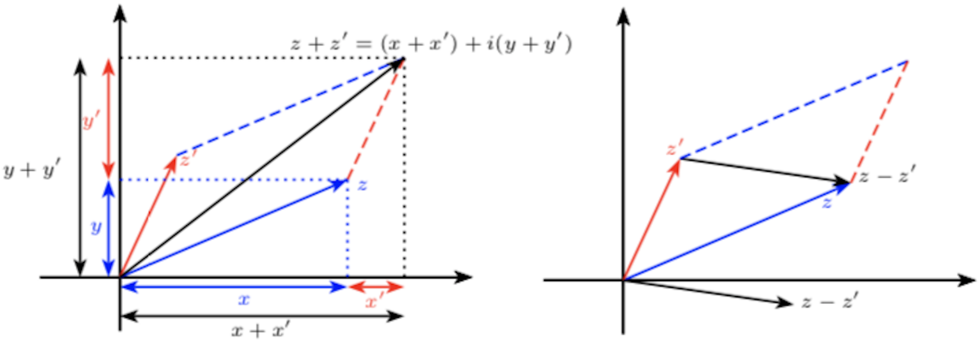


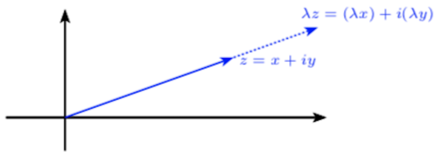
FIGURE 1 – Plan complexe et affixe

Somme : L'addition de deux vecteurs correspond à l'addition des affixes correspondantes :



Somme Différence

Multiplication par un <u>réel</u> $\lambda > 0$ correspond à faire une homothétie de rapport λ.



Multiplication par un réel

V. 1. b Conjugué d'un nombre complexe

Définition 42. *Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. On définit le conjugué de z par :*

$$\overline{z} = x - iy.$$

Remarques :

- $\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(\overline{z}) = -\mathfrak{Im}(z)$
- Géométriquement cela correspond à faire une symmétrie par rapport à l'axe des abscisses :

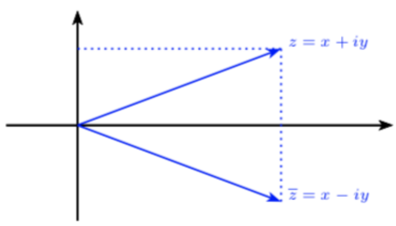


FIGURE 2 – Conjugué

Proposition 43. 1. *La conjugaison est* ***involutive*** *: $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.*

2. *La conjugaison est* ***linéaire*** *:*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}.$$

3. *La conjugaison passe au produit et au quotient*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'},$$

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, z' \neq 0\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

Proposition 44. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a*

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

Ne pas oubliez la division par i dans la partie imaginaire.

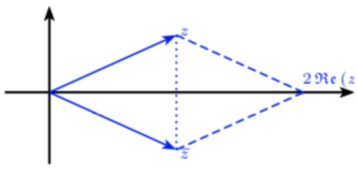


FIGURE 3 – Interpretation graphique $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

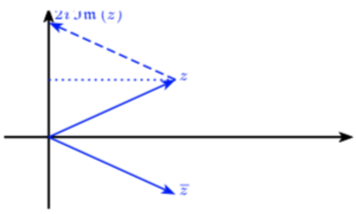


FIGURE 4 – Interpretation graphique $\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

Proposition 45.

$$(z \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow (z = \overline{z})$$

$$(z \in i\mathbb{R}) \Longleftrightarrow (z = -\overline{z})$$

V. 2 Forme trigonométrique

V. 2. a Module d'un nombre complexe

Définition 46. *Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit le module de z par :*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarques :

- Sur $\mathbb{R}$ le module et valeur absolue coïncident, ce pourquoi on utilise la même notation.
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$, de plus $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}^2$, $|z - z'| = 0$ si et seulement si $z = z'$.
- Le module correspond à la norme du vecteur définie par le point d'affixe z. $|z - z'|$ désigne la distance entre les points d'affixes z et z'.

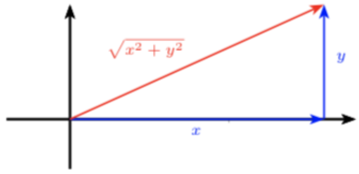


FIGURE 5 – Interpretation graphique du module

Proposition 47. *$\forall z, z' \in \mathbb{C}^2$, $|zz'| = |z||z'|$ et pour $z' \neq 0$: $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$*

Proposition 48. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$z\overline{z} = |z|^2 \quad \text{et} \quad |\overline{z}| = |z|.$$

IL n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{C}$ (qui généralise l'ordre sur $\mathbb{R}$ et qui est compatible avec les opérations de base). Pour obtenir des inégalités on doit être sur $\mathbb{R}$

Proposition 49. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|.$$

Proposition 50.
1. *(Inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$.)*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

L'égalité a lieu si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ ou si $z' = 0$.

2. *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :*

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'|$$

Démonstration. (attention un peu tricky) Passage au carré □

V. 2. b Cercle trigonométrique

Définition 51. *Le* cercle trigonométrique *est le cercle du plan de rayon* 1 *et de centre* $(0,0)$.

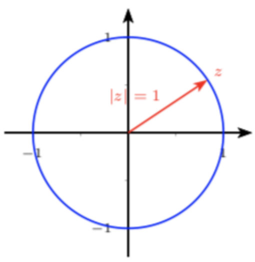


FIGURE 6 – Cercle trigonométrique.

Proposition 52. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *le cercle trigonométrique peut se paramétrer de la manière suivante :*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Avec les nombres complexes il peut se paramétrer de la manière suivante :

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}.$$

V. 2. c Argument d'un nombre complexe

Définition 53. *Pour un point du cercle trigonométrique on définit son* argument *par la longueur algébrique de l'arc entre le point* $1 + 0i$ *et le point* z*. Le sens positif est choisi de tel sorte que l'argument de* i *est égal à* $\frac{\pi}{2}$ *.*

Cette unité est le radian.

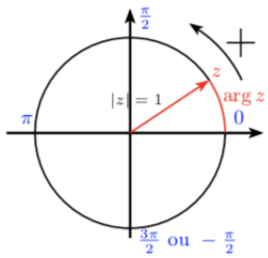


Figure 7 – Cercle trigonométrique orienté.

Définition 54. *Pour nombre complexe non nul* $z \in \mathbb{C}$*, on définit son argument comme l'argument de* $\frac{z}{|z|}$*.*

Remarques :

- L'argument n'est pas défini pour 0.
- L'argument n'est défini qu'à 2π près. On appelle *argument principal* l'unique argument dans $]-\pi, \pi]$, on le note $\arg(z)$
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument principal (ou si ils sont nuls tous les deux).

Proposition 55. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *on a*

1. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$
2. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
3. $\arg(\lambda z) = \arg(z)$
4. $\arg(z) = \arg(z') \quad [2\pi]$ *si et seulement si* $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^*_+$
5. $\arg(z) = \arg(z') \quad [\pi]$ *si et seulement si* $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^*$

Exercice 24. *Exprimer* $\arg\left(\frac{1}{z}\right)$ *en fonction de* $\arg(z)$

Interprétation géométrique : Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. On a

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \text{l'angle } OAOB$$

V. 2. d Forme trigonométrique

Théorème 56. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors z s'écrit de manière unique sous la forme*

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)),$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Démonstration. $\frac{z}{|z|} \in U$, on pose $\theta = \arg(z) = \arg(\frac{z}{|z|})$, on a $\cos(\theta) = \mathfrak{Re}(\frac{z}{|z|})$ et $\sin(\theta) = \mathfrak{Im}(\frac{z}{|z|})$. Ainsi

$$z = |z|(cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

□

Exemple : Mettre $z = -3 + \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

V. 3 Exponentielle complexe

Définition 57. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on note*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Remarques :

- $e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonoùétrique d'argument θ.

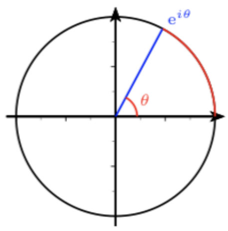


FIGURE 8 – Représentation de $e^{i\theta}$.

Exemples :

$$e^{i0} = 1 \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^{i\pi/2} = i.$$

Proposition 58.
1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $e^{i\theta + 2k\pi} = e^{i\theta}$
2. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
4. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
5. $\forall \theta \in \mathbb{R},$, $|e^{i\theta}| = 1$
6. $U = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} | \theta \in]-pi, \pi]\}$

Démonstration. (2) □

Définition 59. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on pose :*

$$e^{\lambda + i\theta} = e^{\lambda}e^{i\theta}.$$

Remarques :

- On aurait pu dire $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

Proposition 60. *Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ on a*

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(e^z)^n = e^{zn}.$$

V. 3. a Forme exponentielle

Théorème 61. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$, z s'écrit de manière unique sous la forme*

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. Cette écriture s'appelle la forme exponentielle de z.

Remarques :

- Soit $z = \rho e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique. On a alors

$$\rho = |z| \quad \text{et } \theta = \arg(z).$$

- Multplier par un nombre de la forme $\rho e^{i\theta}$ revient géométriquement à faire une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport ρ.

Proposition 62. *Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$:*

$$\arg(zz') = \arg(z) + arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - arg(z') \quad [2\pi]$$

V. 4 Application des nombres complexes

V. 4. a Trigonométrie

Proposition 63. $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \mathfrak{Re}(e^{i\theta}) \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \mathfrak{Im}(e^{i\theta}).$$

Proposition 64 (Formule d'Euler)**.** $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}).$$

⚠ Ne pas oublier le i au dénominateur

Angle moitié $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

Exercice 25. *Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ simplifier l'expression* $\frac{1-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$

Proposition 65 (Formule de Moivre)**.** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{Z}$:*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(\theta)$$

Linéarisation La formule de Moivre permet de *linéariser* les formules avec sin et cos, c'est-à-dire passer de $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ à une somme contenant que des termes de la forme $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

- On utilise la formule d'Euler :

$$\cos^p(\theta)\sin^q(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^a.$$

- On développe avec la formule du binôme de Newton.
- On rassemble les termes de même exposant pour retrouver des sin et cos.

Exercice 26. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser* $\sin^5(\theta)$*. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser* $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$*.*

Délinéarisation Si on cherche à faire l'opération inverse, passer d'une formule avec des somme de $sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$ a des produits. (C'est plus rare de vouloir faire ca)

V. 4. b Polynôme de degré 2

Les nombres complexes permettent de résoudre toutes les équations polynomiales du second degré.

V. 4. c Racine n-eme de l'unité

Hors programme mais tellement classique.

Définition 66. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité, tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que*

$$z^n = 1.$$

Exemples

1. Les racines secondes de 1 sont les nombres $z = 1$ et $z = -1$.
2. Les racines troisièmes de 1 sont les nombres $z = 1$ et $z = j$ et $z = j^2$.

Théorème 67. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité. Elles sont données par*

$$U_n = \{\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Démonstration. □

Exercice 27. *Pour tout $n \geq 2$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$,*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0 \quad et \quad \prod_{k=0}^{n-1} \xi_k = (-1)^{n-1}.$$