Table des matières

I Définitions et propriétés du cosinus, du sinus et de la tangente **1**
- I. 1 Définitions . . . 1
- I. 2 Valeurs remarquables . . . 2
- I. 3 Premières propriétés . . . 3
- I. 4 Formulaire de trigonométrie . . . 3
  - I. 4. a Addition des angles . . . 3
  - I. 4. b Duplication des angles . . . 4
  - I. 4. c Transformation de produits en sommes . . . 4
  - I. 4. d Transformation de sommes en produits . . . 4

II Résolution des équations trigonométriques **6**
- II. 1 Résolution des équations fondamentales : $\cos(\mathbf{x}) = \mathbf{a},\ \sin(\mathbf{x}) = \mathbf{a},\ \tan(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ 6
  - II. 1. a Résolution de $\cos(x) = a$ . . . 6
  - II. 1. b Résolution de $\sin(x) = a$ . . . 8
  - II. 1. c Résolution de $\tan(x) = a$ . . . 10
  - II. 1. d Résolution de $\cos(x) = \cos(y)$, $\sin(x) = \sin(y)$, $\tan(x) = \tan(y)$ . . . 11
- II. 2 Résolution des autres équations . . . 13
  - II. 2. a Équation de type $a\cos(x) + b\sin(x) = c$, avec $(a,b) \in (\mathbb{R}^\star)^2$ . . . 13
  - II. 2. b Équation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être prise comme variable . . . 14
  - II. 2. c Autres types d'équation . . . 15

III Résolution des inéquations trigonométriques **17**
- III. 1 Résolution des inéquations fondamentales . . . 17
- III. 2 Résolution des autres inéquations . . . 17
  - III. 2. a Inéquation de type $a\cos(x) + b\sin(x)$ . . . 17
  - III. 2. b Inéquation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être pris comme variable . . . 18

Chapitre 2 : Trigonométrie

♥ : A connaitre absolument ! ♡ : A connaitre ou à savoir retrouver vite (ie. - de 1 minute). ⚙ : A travailler le temps qu'il faut.

I Définitions et propriétés du cosinus, du sinus et de la tangente

I. 1 Définitions

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité, à savoir le cercle de centre O et de rayon 1. Soit θ un réel et M le point de $\mathcal{C}$ tel que θ soit une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle θ par :

- $\cos(\theta)$ est l'abscisse de M
- $\sin(\theta)$ est l'ordonnée de M
- $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

Remarques :

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leq & \cos(\theta) & \leq & 1 \\ -1 & \leq & \sin(\theta) & \leq & 1 \end{array}$$

- La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

I. 2 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						

Exercice 1. *Donner la valeur des nombres suivants :*

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						

I. 3 Premières propriétés

Relations entre le cosinus, le sinus et la tangente

Théorème 1. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$$

Démonstration. Pythagore. □

Propriétés algébriques

$$\begin{array}{lll}
\cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = \sin(x) & \tan(-x) = -\tan(x) \\
\cos(x+\pi) = -\cos(x) & \sin(x+\pi) = -\sin(x) & \tan(x+\pi) = \tan(x) \\
\cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\
\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) & \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x) & \tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(x)} \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) & \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}
\end{array}$$

A retrouver géométriquement.

I. 4 Formulaire de trigonométrie

I. 4. a Addition des angles

Proposition 2. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ on a :*

- $\cos(a+b) =$

  $\cos(a-b) =$
- $\sin(a+b) =$

  $\sin(a-b) =$
- $\tan(a+b) =$

On retrouvera ces formules grâce aux nombres complexes.

I. 4. b Duplication des angles

Proposition 3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) && && \\
&= 2\cos^2(a) - 1 && \Longleftrightarrow && \cos^2(a) = \tfrac{\cos(2a)+1}{2} \\
&= 1 - 2\sin^2(a) && \Longleftrightarrow && \sin^2(a) = \tfrac{1-\cos(2a)}{2} \\
\sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) && &&
\end{aligned}$$

Démonstration. □

Exercice 2. *Calculer* $\cos(\pi/12)$

I. 4. c Transformation de produits en sommes

Proposition 4. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$:*

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\
\cos a \sin b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))
\end{aligned}$$

Démonstration. □

Exercice 3. *Calculer cos*$(5\pi/12)$ *($a = \pi/12$, $b = \pi/3$)*

I. 4. d Transformation de sommes en produits

Proposition 5. *Pour tout* $p, q \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos(\tfrac{p-q}{2})\cos(\tfrac{p+q}{2}) \\
\cos p - \cos q &= -2\sin(\tfrac{p-q}{2})\sin(\tfrac{p+q}{2}) \\
\sin p + \sin q &= 2\sin(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \\
\sin p - \sin q &= 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})
\end{aligned}$$

Démonstration. □

Exercice 4. *Résoudre* $\cos(2x) + \cos(4x) = 0$

II Résolution des équations trigonométriques

II. 1 Résolution des équations fondamentales : $\cos(\mathbf{x}) = \mathbf{a}, \ \sin(\mathbf{x}) = \mathbf{a}, \ \tan(\mathbf{x}) =$

II. 1. a Résolution de $\cos(x) = a$

Proposition 6. *Soit* $a \in [-1, 1]$. *Il existe alors un unique angle* θ *dans* $[0, \pi]$ *tel que* $\cos(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arccos(a)$

⚠ $\arccos(a)$ est par définition un nombre dans $[0, \pi]$.

⚠ La fonction arccos n'est pas défini sur $\mathbb{R}$, mais seulement sur $[-1, 1]$.

Valeurs particulières :

a	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arccos a$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/6$	0

Exercice 5. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations trigonométriques suivantes :* $\cos(x) = -2, \ \cos(x) = -1, \ \cos(x) = 0, \ \cos(x) = \frac{1}{2}, \ \cos(x) = 1, \ \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos(x) = \frac{1}{2}$. Sur $[0, \pi]$ il y a une unique solution, qui est par définitioin $x = \arccos(\frac{1}{2}) = \pi/3$

Sur $[-\pi, \pi]$, il y a 2 solutions, $\pi/3$ et $-\pi/3$ par symmétrie de la fonction cos.
Sur $\mathbb{R}$ il y a une infinité de solutions données par :

$$x \equiv \pi/3 \, [2\pi]$$

ou

$$x \equiv -\pi/3 \, [2\pi]$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = a, \ a \in \mathbb{R}$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, $\quad \mathcal{S} = \emptyset$
- Si $a = 1$, $\quad \mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $a = -1$, $\quad \mathcal{S} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$, $\quad \mathcal{S} = \pm\arccos(a) + 2\pi\mathbb{Z}$

Exemple. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0, 2\pi[$ *:* $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$.

Correction. Notons $y = 3x$. On a vu que y vérifié :

$$y \equiv \pi/3\,[2\pi]$$

ou

$$y \equiv -\pi/3\,[2\pi]$$

Soit en revenant à la variable x :

$$3x \equiv \pi/3\,[2\pi]$$

ou

$$3x \equiv -\pi/3\,[2\pi]$$

Ce qui est équivalent à

$$x \equiv \pi/9\,[2\pi/3]$$

ou

$$x \equiv -\pi/9\,[2\pi/3].$$

On obtient ainsi les solutions sur $[0, 2\pi[$:‘

— $\pi/9$,
— $\pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9$,
— $\pi/9 + 4\pi/3 = 13\pi/9$
— $\pi/9 + 6\pi/3 = 19\pi/9 > 2\pi$ on est allé trop loin,$\pi/9 + 6\pi/3$ n'est pas solution sur $[0, 2\pi[$.

On refait la même chose avec $-\pi/9$:

— $-\pi/9$,(qui n'est pas solution car n'est pas dans $[0, 2\pi[$)
— $-\pi/9 + 2\pi/3 = 5\pi/9$,
— $-\pi/9 + 4\pi/3 = 11\pi/9$
— $-\pi/9 + 6\pi/3 = 17\pi/9$

Les solutions de $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi[$ sont :

$$\mathcal{S} = \{\pi/9, 7\pi/9, 13\pi/9, 5\pi/9, 11\pi/9, 17\pi/9\}$$

□

Exercice 6. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0, 2\pi[$ *:* $\cos(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\cos(x) = \dfrac{7}{8}$ *et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.*

II. 1. b Résolution de $\sin(x) = a$

Proposition 7. *Soit* $a \in [-1, 1]$. *Il existe alors un unique angle* θ *dans* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tel que* $\sin(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arcsin(a)$.

⚠ Par définition $\arcsin(a) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

⚠ Le domaine de définition de arcsin est $[-1, 1]$.

Valeurs particulières :

a	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin a$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Exercice 7. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations trigonométriques suivantes :* $\sin(x) = -6$, $\sin(x) = -1$, $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = \frac{1}{2}$, $\sin(x) = 1$, $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution

$$x = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi/3$$

Sur $[-\pi, \pi]$ les solutions sont

$$x = \pi/3 \quad \text{ou} \quad x = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$$

Sur $\mathbb{R}$ les solutions sont

$$\mathcal{S} = \{\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = -\frac{\pi}{2} + +2\pi\mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$, $\mathcal{S} = \pm\arcsin(a) + 2\pi\mathbb{Z}$ $\cup \pi +$

Exemple. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[-\pi, \pi[$ *:* $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction. On a vu que les solutions de $\sin(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ étaient données par

$$y \equiv \pi/3\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad y \equiv 2\pi/3\,[2\pi].$$

Donc

$$3x \equiv \pi/3\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv 2\pi/3\,[2\pi].$$

Soit encore :

$$x \equiv \pi/9\,[2\pi/3] \quad \text{ou} \quad x \equiv 2\pi/9\,[2\pi/3].$$

— $\pi/9$
— $\pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9$
— $\pi/9 - 2\pi/3 = -5\pi/9$
— $\pi/9 - 4\pi/3 = -11\pi/9 < -\pi$ n'est donc pas solution sur $[-\pi, \pi[$.

et pour $2\pi/9$

— $2\pi/9$
— $2\pi/9 + 2\pi/3 = 8\pi/9$
— $2\pi/9 - 2\pi/3 = -4\pi/9$
— $2\pi/9 - 4\pi/3 = -10\pi/9 < -\pi$ n'est donc pas solution sur $[-\pi, \pi[$.

Les solutions sur $[-\pi, \pi[$ sont données alors par :

$$\mathcal{S} = \{\pi/9, 2\pi/9, 7\pi/9, -5\pi/, 8\pi/9, -4\pi/9\}$$

$\square$

Exercice 8. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[-\pi, \pi[$: $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$ *et* $\sin(x) = \frac{1}{5}$ *et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.*

II. 1. c *Résolution de* $\tan(x) = a$

Proposition 8. *Soit* $a \in \mathbb{R}$*. Il existe alors un unique angle* θ *dans* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $\tan(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arctan(a)$

Valeurs particulières :

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan a$	-$\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

Exercice 9. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations trigonométriques suivantes :* $\tan(x) = -1$*,* $\tan(x) = 0$*,* $\tan(x) = 1$*,* $\tan(x) = -\sqrt{3}$*,* $\tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$*.*

Correction. Sur $]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ admet pour solution, $x = \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\pi/6$.

Sur $\mathbb{R}$ les solutions sont donc :

$$\{-\pi/6 + k\pi \,|\, k \in /Z\}$$

$\square$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\tan(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \{\arctan(x) + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[-\pi, \pi[$ *:* $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$*.*

Correction. On a vu que les solutions de $\tan(y) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ étaient

$$y \equiv -\pi/6\,[\pi]$$

Donc

$$\frac{x}{2} \equiv \frac{-\pi}{6}\,[\pi],$$

Soit

$$x \equiv \frac{-\pi}{3}\,[2\pi].$$

Sur $[-\pi, \pi[$ les solutions sont $\{-\pi/3\}$.

$\square$

Exercice 10. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[-\pi, \pi[$ *:* $\tan(3x) = 1$ *et* $\tan(x) = -2$ *et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.*

II. 1. d Résolution de $\cos(x) = \cos(y)$, $\sin(x) = \sin(y)$, $\tan(x) = \tan(y)$

D'après les résultats précédents, on a :

$$\cos x = \cos y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\sin x = \sin y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\tan x = \tan y \;\Leftrightarrow\; x \equiv y\,[\pi]$$

Pour résoudre les autres équations du type $\cos(x) = \sin(y)$ on se ramène à une équation précédente par exemple en faisant $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin(y)$ et en résolvant :

$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$$

Exercice 11. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0, 2\pi[$ *:* $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ *et* $\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan x$ *et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.*

Correction. Sur $\mathbb{R}$ l'équation a pour solution

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} \equiv x - \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{2} \equiv -x + \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} \equiv x - \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{2} \equiv -x + \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{12}\,[2\pi/3] \end{cases}$$

On cherche les solutions appartenant à $[0, 2\pi[$:

— $-\frac{3\pi}{4} \notin [0, 2\pi[$
— $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi[$
— $-\frac{\pi}{12} \notin [0, 2\pi[$
— $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \in [0, 2\pi[$
— $-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} \in [0, 2\pi[$
— $-\frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{3} = \frac{23\pi}{12} \in [0, 2\pi[$

Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont :

$$\mathcal{S} = \{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\}.$$

$\square$

II. 2 Résolution des autres équations

Méthode générale : Transformer l'expression pour se ramener à résoudre des équations fondamentales.

II. 2. a Équation de type $a\cos(x) + b\sin(x) = c$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^\star)^2$

Le but est de factoriser l'expression pour faire apparaître un seul cosinus. Pour cela, on cherche $r \in \mathbb{R}^+$, et $\phi \in [0, \pi[$ tels que

$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x - \phi)$$

On obtient :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x)\cos(\phi) + r\sin(x)\sin(\phi)$$

En identifiant on obtient :

$$\begin{cases} r\cos(\phi) = a \\ \text{et} \\ r\sin(\phi) = b \end{cases}$$

Ainsi on doit avoir $r^2 = a^2 + b^2$ et

$$\begin{cases} \cos(\phi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \text{et} \\ \sin(\phi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Une fois sous cette forme on résout

$$r\cos(x - \phi) = c$$

Exemple. *Résoudre* $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$.

Correction. On cherche $r > 0$ et $\phi \in [0, 2\pi[$ tel que $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = r\cos(x - \phi)$ D'après les calculs précédents on sait que nécessairement

$$r^2 = 3 + 1 = 4$$

donc $r = 2$ car $r > 0$. On a ensuite

$$\begin{cases} \cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{et} \\ \sin(\phi) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\phi = \frac{\pi}{6}$. Ainsi

$$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$$

Donc l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$ équivaut à

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{array}\right.$$

Soit

$$\left\{\begin{array}{l} x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{array}\right.$$

□

Remarque. *En physique, cette méthode permet de déterminer l'amplitude et la phase d'un signal défini comme la somme de deux signaux.*

Exercice 12. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0, \pi[$ *les équations suivantes :* $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ *et* $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = -\sqrt{2}$.

II. 2. b Équation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être prise comme variable

Il s'agit des équations où l'on peut poser le changement de variable $X = \cos(x)$ ou $X = \sin(x)$ ou $X = \tan(x)$. On reconnaît ces équations lorsque l'on peut mettre l'équation à résoudre sous la forme d'une équation ne comportant soit que des $\cos(x)$, $\cos^2(x)$, $\cos^3(x)\ldots$, soit que des $\sin(x)$, $\sin^2(x)$, $\sin^3(x)\ldots$, soit que des $\tan(x)$, $\tan^2(x)$, $\tan^3(x)\ldots$.

- Poser X égal à $\cos x$ ou $\sin x$ ou $\tan x$.
- Résoudre l'équation en X du second, troisième... degré ainsi obtenue.
- Revenir ensuite à x en résolvant des équations fondamentales.

Exemple. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0, 2\pi[$ *l'équation :* $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$.

Correction. On pose $X = \cos(x)$ on obtient

$$2X^2 + X - 1 = 0,$$

dont les solutions sont $X = -1$ et $X = \frac{1}{2}$. L'équation est equivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(x) = -1 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Soit

$$\left\{\begin{array}{l} x \equiv \pi\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{3},[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{3},[2\pi] \end{array}\right.$$

Sur $[0, 2\pi[$ les solutions sont donc :

$$\mathcal{S} = \{\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}.$$

$\square$

Exercice 13. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :* $4\cos^2(x) - 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{6} = 0$, $\tan^3(x) - \sqrt{3}\tan^2(x) - \tan(x) + \sqrt{3} = 0$ *et* $2\sin^2(x) + 5\cos(x) - 4 = 0$.

II. 2. c Autres types d'équation

Lorsqu'on est dans aucun des cas précédents, on utilise les formules trigonométriques pour se ramener à une équation factorisée dont chaque terme est une équation fondamentale.

Exemple. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-\pi, \pi[$:* $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Correction.

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \mathfrak{Re}(e^{3ix}) \\ &= \mathfrak{Re}(e^{ix^3}) \\ &= \mathfrak{Re}((\cos(3x) + i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1-\cos^2(x)) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) &= 1 + \cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 + 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ &= -2\cos(x) + 2\cos^2(x) + 4\cos^3(x) \end{aligned}$$

L'équation ést donc équivalente à

$$-\cos(x) + \cos^2(x) + 2\cos^3(x) = 0.$$

On fait le changement de variable $X = \cos(x)$ on obtient :

$$-X + X^2 + 2X^3 = 0$$

Soit

$$X(2X^2 + X - 1) = 0$$

Les solutions sont donc $X = 0$ ou $2X^2 + X - 1 = 0$. En revenant à la variable x on obtient $\cos(x) = 0$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ Les solutions sont donc

$$\begin{cases} x \equiv \pi\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{3},[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{3},[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$$

□

Exercice 14. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[-\pi,\pi[$ *:* $\cos(2x) + \cos(x) = \sin(2x) + \sin(x)$.

Correction. On utilise les formules d'additivité de cosinus et sinus :

$$\cos(2x) + \cos(x) = 2\cos(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

$$\sin(2x) + \sin(x) = 2\sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

On obtient donc l'équation :

$$\cos(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = \sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

soit

$$\cos(\frac{x}{2})(\cos(\frac{3x}{2}) - \sin(\frac{3x}{2})) = 0$$

Ce qui équivaut

$$\begin{cases} \cos(\frac{x}{2}) = 0 \\ \text{ou} \\ (\cos(\frac{3x}{2}) - \sin(\frac{3x}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \\ \text{ou} \\ \cos(\frac{3x}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv \pi\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{3x}{2} = (\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2})\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{3x}{2} = (-\frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2})\,[2\pi] \end{cases}$$

□

III Résolution des inéquations trigonométriques

III. 1 Résolution des inéquations fondamentales

Les inéquations fondamentales sont les inéquations de type $\cos x \leq a$, $\sin x \geq a$, $\tan x < a$.

On résout GRAPHIQUEMENT sur le cercle trigonométrique.

Remarque. ⚠ *Ne jamais résoudre une inéquation sans passer par le cercle trigonométrique.*

Exemple. *Résoudre sur* $[0, 2\pi[$ *puis sur* $\mathbb{R}$*l'inéquation :* $\cos(x) < \frac{1}{2}$.

Correction. Sur $[0, 2\pi]$ les solutions sont

$$]\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}[=]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}[$$

Sur $\mathbb{R}$ les solutions sont

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi[$$

□

Exercice 15. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0, 2\pi[$ *les inéquations suivantes :* $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(2x) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan(x) \geq -1$ *et* $-1 < \tan(x) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

III. 2 Résolution des autres inéquations

III. 2. a Inéquation de type $a\cos(x) + b\sin(x)$

Exemple. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0, \pi[$ *:* $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > \sqrt{2}$.

Correction. On va mettre $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$ sous la forme $r\cos(x - \phi)$ pour $r > 0$ et $\phi \in [-\pi, \pi]$.

On a vu que $r^2 = 3 + 1 = 4$, ce qui donne $r = 2$.

Donc $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\phi) = \frac{-1}{2}$ D'où $\phi = \frac{-\pi}{6}$.

Donc l'équation devient

$$2\cos(x + \frac{\pi}{6}) > \sqrt{2}.$$

Soit

$$\cos(x + \frac{\pi}{6}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc sur $]-\pi,\pi]$:

$$-\frac{\pi}{4} < x+\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$$

Soit

$$-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$$

Donc sur $\mathbb{R}$ les solutions sont données par :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{5\pi}{12}+2k\pi, \frac{\pi}{12}+2k\pi[$$

$\square$

Exercice 16. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0,\pi[$ *les inéquations suivantes :* $\cos(x)-\sin(x) \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ *et* $\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x) \leq -\sqrt{2}$.

III. 2. b Inéquation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être pris comme variable

Exemple. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0,2\pi[$ *l'inéquation :* $2\cos^2(x)+\cos(x) > 1$.

Correction. $2X^2+X-1>0$ a pour solution

$$X \in]-\infty,-1[\cup]\frac{1}{2},\infty[$$

Donc l'équation $2\cos^2(x)+\cos(x)>1$ est équivalente à

$$\cos(x) > \frac{1}{2}$$

$\square$

Exercice 17. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[0,2\pi[$ *les inéquations suivantes :* $4\cos^2(x)-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos(x)+\sqrt{6}<0$, $\tan^3(x)-\sqrt{3}\tan^2(x)-\tan(x)+\sqrt{3}\geq 0$ *et* $2\sin^2(x)+5\cos(x)-4\leq 0$.