Table des matières

Sommes et produits

I Sommes simples

I. 1 Définition

Définition 1. *Soit n un entier naturel et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes.*
Leur somme est notée $\sum_{k=1}^{n} a_k$ Cela correspond à $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Remarque. *Si le symbole $\sum$ vous semble complexe dans l'expression $\sum_{k=1}^{n} a_k$, ne pas hésiter à écrire la somme en extension $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pour mieux la comprendre.*

Exercice 2.

1. *Calculer les quatre sommes suivantes :* $\sum_{k=1}^{8} 1$, $\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} 1$, $\sum_{k=0}^{n} (-4)$.
2. *Comparer* $\sum_{k=2}^{5} a_k$ *et* $\sum_{k=0}^{3} a_{5-k}$.
3. *Écrire en extension* $\sum_{k=0}^{5} a_{3k+1}$.

Exercice 3. *Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole* $\sum$ *:*

1. $5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4$.
2. $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$.
3. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$.
4. $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$.

I. 2 Propriétés des sommes

⚠ L indice de sommation muet

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ NE DEPEND PAS DE k. On a ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$

I. 3 La linéarité de la somme

Proposition 4. *Soient n un entier naturel. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels ou complexes, et soit λ un nombre réel ou complexe.*

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + b_k) =$$

⚠ C'est faux avec la multiplication et la division : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} b_k}$ ($b_k \neq 0$).

I. 4 La relation de Chasles

Proposition 5. *Soient n un entier naturel et $p \in [\![1, n-1]\!]$.*
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$$

Exemples.

- $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j$
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} a_j = \sum_{j=0}^{n} a_j + a_{n+1}$

Exercice 6.

- *Écrire avec une seule somme :* $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=n+1}^{2n} b_j =$
- *Simplifier les sommes suivantes :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ *et* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+2} a_i + \sum_{j=1}^{n+1} a_j - 2\sum_{k=2}^{n+1} a_k$.

I. 5 Le changement d'indice

Exemples.

- *Transformation de* $\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}$:

- *Transformation de* $\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}$:

On pose $j = i+1,\ i+2,\ i-1,\ i-2, \ldots$.
On doit alors :

- Regarder le nouvel ensemble de sommation
- Transformer i en $j-1,\ j-2\ j+1,\ j+2$
- Changer les indices dans toute la somme.

Exercice 7. *On pose :* $S = \sum_{k=1}^{n} k$ *et* $T = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$. *Montrer que* $S = T$, *puis calculer* $S+T$. *En déduire la valeur de* S.

II Exemples classiques

II. 1 Somme d'entiers

Nombre de terme dans une somme ⚠ Il y a $(n+1)$ éléments dans $[\![0, n]\!]$

Soient n et p deux entiers naturels avec $p \in [\![0, n]\!]$.

⚠ Il y a $(n-p+1)$ éléments dans $[\![p, n]\!]$

- $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
- $\sum_{k=0}^{n} 1 =$
- $\sum_{k=p}^{n} 1 =$

Exercice 8. *Calculer les sommes suivantes* $S_1 = \sum_{k=0}^{n} (-5)$, $S_2 = \sum_{k=19}^{54} 3$, *et* $S_3 = \sum_{j=5}^{100} (-1+x)$.

Sommes d'entiers

Pour tout n entier naturel :

- $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=p}^{n} k = \dfrac{(n+p)(n-p+1)}{2}$

- $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 =$
- $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 =$

Exercice 9. *Calculer les sommes suivantes* $S_1 = \sum_{k=0}^{n}(-k^2+n+1)$, $S_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{p+1}$, *et* $S_3 = \sum_{j=1}^{n} j(3-2j^2)$.

II. 2 Somme des termes d'une suite géométrique

Pour tout x réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^\star$:

- $\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si x=0} \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$
- $\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si x=0} \\ \frac{x^p-x^{n-p+1}}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 10. *Calculer les sommes suivantes* $S_1 = \sum_{k=0}^{n}(5 \times 2^k + k + 1)$, $S_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{-2}{3^j}$, $S_3 = \sum_{k=1}^{n} 3^{k+1}$, *et* $S_4 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+2}3^{2j+1}$.

Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$

Proposition 11 (Identité remarquable)**.** *Pour tous nombres réels a et b et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:*

$$a^n - b^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

Exemples.
- $a^2 - b^2 =$
- $a^3 - b^3 =$
- $a^4 - b^4 =$

II. 3 Binôme de Newton

Proposition 12.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemples.
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$ *et* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k =$

Exercice 13. *Calculer les sommes suivantes* $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1}$, $S_2 = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}$, $S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k$ *et* $S_4 = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

Proposition 14.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}.$$

Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$

Exercice 15. *Calculer les sommes suivantes avec* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ *et* $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ *avec* $x \in \mathbb{R}$.

Trouver une place à ca. Formule de Pascal généralisée

Pour tous nombres entiers n et N avec $n \in [\![0, N]\!]$:

$\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} =$

Formule de Vandermonde

Pour tout $(n, a, b) \in \mathbb{N}^3$:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} =$
- Cas particulier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 =$

II. 4 Sommes télescopiques

Reconnaitre une somme de la forme

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1}$$

Utiliser la linéarité de la somme

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$$

Faire un changement de variable :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

Se rappeler que l'indice de sommation est un indice muet :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

Utiliser la relation de Chasles :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n - u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k$$

Conclure :

$$T_n = u_n - u_0$$

Si on est à l'aise avec les sommes certains passages peuvent être sautés.

Exercice 16. *Calculer les sommes suivantes :*

1. $S = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$
2. $S = \sum_{k=2}^{n} \ln \left(\frac{k}{k-1} \right)$
3. $S = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{-2}{k-1} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$
4. $S = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ *: chercher* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$.
5. $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ *: chercher* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

III Sommes doubles

III. 1 Définition et notations

On souhaite calculer des sommes dont les termes dépendent de deux indices, par exemple : $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} a_{i,j}$.

Exemples. *Calculer les sommes doubles suivantes :* $S_1 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (i+j)$ *et* $S_2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij$.

Remarque. *On pourra noter ces sommes doubles à l'aide d'un seul symbole* $\sum$*, en indiquant en dessous comment varient les deux indices. Par exemple, on a :* $S_1 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (i+j) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

et $S_2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

De plus, il est toujours conseillé de représenter le domaine des indices pour lequel on effectue la somme.

III. 2 Méthode directe

Calcul de $\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_i \left[\sum_j a_{ij} \right]$:

- On calcule d'abord la somme la plus intérieure (ici celle d'indice j) qui dépond ou non de i
- On calcule la deuxième somme.

Exercice 17. *Calculer les sommes suivantes* $S_1 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} x^j$, $S_2 = \sum_{k=0}^{n^2} \sum_{i=k}^{k+2} ki^2$ *et* $S_3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$.

III. 3 Inversion des symboles sommes

Lorsque l'on n'arrive pas à calculer la somme la plus intérieure directement, on commence par inverser le sens des symboles somme. Il faut alors distinguer le cas d'indices liés ou non liés.

1. Indices non liés : les indices ne dépendent pas les uns des autres. On inverse sans précaution :

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n'} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n'} \sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$$

2. Indices liés : les bornes d'un indice dépendent des autres. On fait très attention :

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} =$$

Car : $\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \leq & i & \leq & n \\ 0 & \leq & j & \leq & i \end{array} \right. \iff$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} =$$

Car : $\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \leq & i & \leq & n \\ i & \leq & j & \leq & n \end{array} \right. \iff$

Remarque. *Dessiner le domaine des indices pour lequel on effectue la somme, ou représenter les positions relatives des indices sur un axe réel si l'échange d'indices liés vous paraît difficile.*

Exemples. *Calculer les sommes doubles suivantes :* $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$ *et* $S_2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} x^j$.

Exercice 18. *Vérifier que* $\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} 2^k$. *Donner alors une expression simple de cette somme en intervertissant l'ordre de sommation.*

IV Produits

Tout ce qui a été fait avec les sommes peut aussi être fait avec les produits.

Définition 19. *Soit n un entier naturel et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes.*
Leur produit est noté
Cela correspond à $\prod_{k=1}^{n} a_k = \ldots\ldots\ldots$

Exemples. *Calculer les produits suivants :* $P_1 = \prod_{k=1}^{n} x$ *et* $P_2 = \prod_{j=1}^{n} (2j)$.

Exercice 20. *Calculer* $P_1 = \prod_{k=0}^{n} 2^k$ *et* $P_2 = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

Remarque. *Lien entre la somme et le produit :*
Soit n un entier naturel et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels tous strictement positifs.

Exemple. *Calculer la somme :* $S = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.