Table des matières

Chapitre 5 - Suites

I Définitions et premiers exemples

I. 1 Définitions, notations

Définition 1. *Définition d'une suite :*
- *Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).*
- *Pour désigner les valeurs prises par la suite, on note u_n à la place de $u(n)$.*
- *Pour désigner la suite globale, on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est la suite de terme général u_n.*

Remarque. *Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang.*
Exemple : ....
Plus généralement, on note .... la suite de terme général u_n définie à partir du rang n_0.

⚠ Ne pas confondre ....

Représentation graphique d'une suite On peut représenter graphiquement une suite réelle en portant en abscisse les entiers naturels et en ordonnées les valeurs correspondantes de la suite. On obtient ainsi une succession de points qui décrivent l'évolution de la suite.

Exemple. *Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.*

I. 2 Quelques exemples importants

I. 2. a Suite arithmétique

Définition 2. *Définition d'une suite arithmétique :*
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.*

- *Expression explicite :* $u_n = u_0 + nr$
- *Limite :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$
- *Somme des termes :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k =$

Démonstration. □

Remarque. *Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_p si* ....
On a alors $u_n =$ .... *et* $\sum_{k=p}^{n} u_k =$ ....

I. 2. b Suite géométrique

Définition 4. *Définition d'une suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique de raison q*

$$u_{n+1} = qu_n$$

Proposition 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*

- *Expression explicite : $u_n =$*
- *Limite (pour $u_0 > 0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left\{ \right.$*
- *Somme des termes : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \left\{ \right.$*

Remarque. *Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_p si* ....
On a alors $u_n =$ .... *et* $\sum_{k=p}^{n} u_k =$ ....

I. 2. c Suite arithmético-géométrique

I. 2. d Définition par récurrence :

Définition 6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b ($a \neq 1$ et $b \neq 0$ sinon on est dans les deux cas précédents) tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

I. 2. e Expression explicite : Méthode

- Recherche de la limite éventuelle en résolvant $al + b = l$.
- Étude de la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - l$.
  - ⋆ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
  - ⋆ En déduire son expression explicite.
- Expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + l$.

Exemple. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Calculer u_n.*

1. ***Recherche de la limite éventuelle :***

2. ***Étude de la suite auxiliaire $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$***

3. ***Expression explicite de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$***

4. ***Limite de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$***

Exercice 7. *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 1$. Donner son expression explicite, sa limite et la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.*

Remarque. ⚠ *Les réels a et b ne doivent pas dépendre de n !*

Exercice 8. *Trouver le terme général des suites définies par* $u_{n+1} = nu_n, u_{n+1} = \frac{2}{n}u_n,$ *et* $u_{n+1} = u_n^2$.

I. 2. f Suite récurrente linéaire d'ordre deux

I. 2. g Définition par récurrence :

Définition 9. *Soient* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $b \neq 0$. *On appelle suite récurrente linéaire d'ordre deux toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence :*

$$(\mathcal{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} =$$

avec deux conditions initiales données (u_0 *et* u_1)*.*

I. 2. h Expression explicite : Méthode

- Résolution de l'équation caractéristique associée à la suite :

$$(E) \quad x^2 - ax - b = 0.$$

- Expression explicite de la suite selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique :
  - ⋆ Si $\Delta > 0$: (E) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et l'expression explicite de la suite est :

    $$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

  - ⋆ Si $\Delta = 0$, (E) a une solution réelle double r_0, et l'expression explicite de la suite est :

    $$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

  - ⋆ Si $\Delta < 0$: (E) a deux solutions complexes conjuguées que l'on écrit sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$). L'expression explicite de la suite est alors :

    $$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- Calcul des constantes α et β à l'aide des valeurs des conditions initiales u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire.

Exemple. *Étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0 = 1$ *et* $u_1 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.

Exercice 10. *Étudier les suites définies par :*

- $u_0 = 1$ *et* $u_1 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
- $u_0 = 1$ *et* $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

II Principales propriétés sur les suites

II. 1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 11. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée si* ....
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée si* ....
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si* ....

Exercice 12.

- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée si* ....
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas minorée si* ....
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas bornée si* ....

Exercice 13.

1. *Soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n^2+2}$. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
2. *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est bornée par* 0 *et 1.*
3. *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}\dfrac{1}{k}$. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est minorée par* $\ln 2$. *On pourra utiliser après l'avoir démontrée l'inégalité suivante :* $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

II. 2 Suites croissantes, décroissantes, monotones

Définition 14. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si* ....
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si* ....
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si* ....
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si* ....
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si* ....
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si* ....
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si* ....

⚠ Il existe plein de suites qui ne sont ....
Exemple : ....

II. 2. a Méthodes

❶ Étude du signe de $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$:

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 15. *Étudier la monotonie des deux suites suivantes :*

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 - 2n$.

(b) La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

❷ Comparaison de $\mathbf{u_{n+1}/u_n}$ avec 1 si les termes de la suite sont strictement positifs :

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 16. *Étudier la monotonie des deux suites suivantes :*

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$.

(b) La suite $(P_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

II. 3 Cas particulier des suites définies explicitement $u_n = f(n)$

L'étude de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ permet d'obtenir les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 17. *Majoration, minoration.*

- *Si la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée*
- *Si la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée*

- *Si la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Exercice 18.
- *Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3^{-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.*
- *Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-1-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{e}$.*

Proposition 19. *Monotonie.*
- *Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
- *Si la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.*

Exercice 20. *Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-n}$.*

II. 4 Cas particulier des suites implicites

II. 4. a Définition

C'est un type de suite (qui tombe régulièrement à l'oral) dont les méthodes d'étude sont vraiment spécifiques. On pourra utiliser le théorème suivant dit 'théorème de la bijection'.

Théorème 21. *Soit f une fonction, continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors pour tout $y_0 \in \{f(x) \,|\, x \in I\}$, il existe un unique $x_0 \in I$ tel que*

$$f(x_0) = y_0$$

Exemple. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n par : $f_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $x_n \geq 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Ainsi on définit une suite $(x_n)_{n\geq 1}$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable et $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $f_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, le théorème de la bijection assure qu'il existe une unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$

II. 4. b Majoration, minoration

Exemple. *Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0 et majorée par 1.*

Méthode : Utiliser le tableau de variations de f_n.

x	0	x_n	1
Signe de $f_n'(x)$		$+$	
Variations de f_n	-1	0	1

II. 4. c Monotonie

Pour connaître la monotonie d'une suite implicite, il faut connaître le signe de $f_n(x_{n+1})$. Le tableau de variation de f_n permet ensuite de conclure si $x_n \leq x_{n+1}$ ou si $x_{n+1} \leq x_n$.

Méthode pour obtenir la monotonie d'une suite implicite :
- Calculer $f_n(x_{n+1})$.
- Simplifier cette expression en utilisant le fait que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.
- En déduire le signe de $f_n(x_{n+1})$.
- Conclure grâce à la monotonie de f_n.

Exemple. *Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.*

On a par ailleurs,
$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1.$$
Par définition $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ donc, $x_{n+1} - 1 = -x_{n+1}^{n+1}$. Finalement,
$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n(1 - x_{n+1}) > 0.$$

Donc $x_{n+1} > x_n$ voir tableau :

x	0	x_n	x_{n+1}	1
Signe de $f_n'(x)$			$+$	
Variations de f_n	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	$f_n(x_{n+1}) > 0$ $\nearrow$	1

Exercice 22. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x - 2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Ainsi on définit une suite $(x_n)_{n\geq 1}$. Calculer x_1.*
Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0, et qu'elle est décroissante.

III Limites d'une suite

III. 1 Convergence d'une suite, limite finie

III. 1. a Définition

Intuitivement, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel ℓ si u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ.

Graphiquement, il faut que toute bande horizontale (aussi petite soit-elle) centrée autour de ℓ contienne tous les u_n lorsque n est assez grand.

Définition 23. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

- *On note alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.
- *Lorsque la suite ne converge pas, on dit qu'elle diverge.*

Remarque. *Les premiers termes de la suite n'influence pas la valeur de la limite.*

III. 1. b Propriétés des limites finies

Unicité de la limite :

Proposition 24. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite, celle ci est unique*

Limite finie et suite bornée :

Proposition 25. *Toute suite convergente est bornée*

⚠ La réciproque est fausse. Il existe des suites bornées qui ne sont pas convergentes : eg $(-1)^n$.

Limite positive et signe de la suite :

Proposition 26. *Soit une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers une limite* $\ell > 0$. *Alors il existe* $N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Longrightarrow u_n > 0$.

III. 2 Divergence d'une suite, limite infinie

Définition 27. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *si :*

$$\forall A > 0,\, \exists N_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0) \Longrightarrow (u_n \geq A)$$

- *On note alors* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$ *si :*

$$\forall A > 0,\, \exists N_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0) \Longrightarrow (u_n \leq -A)$$

- *On note alors* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Remarque. *L'étude de la convergence ou de la divergence d'une suite donne l'un des trois résultats suivants :*

- *Soit la suite admet une limite finie, on dit qu'elle converge. Sinon elle diverge.*
- *Soit la suite diverge vers* $\pm\infty$, *on dit qu'elle est divergente vers* $+\infty$
- *Sinon on dit qu'elle est divergente (sans plus de précision)*

III. 3 Opérations sur les limites

Pour calculer la limite d'une suite, on utilise les propriétés de somme, produit, et quotient de limites. On retiendra les formes indéterminées suivantes :

$$\boxed{\textbf{FI} : (+\infty) + (-\infty)}$$

Exemples. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n = -n$. *On a :* $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

- *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}, v_n = n + 2$. *On a alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ *et* $\lim_{n \to +\infty} u_n + v_n = 2$
- *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 + n$. *On a alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ *et* $\lim_{n \to +\infty} u_n + v_n = +\infty$
- *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}, v_n = n + (-1)^n$. *On a alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ *et* $u_n + v_n = (-1)^n$ *n'a pas de limite.*

$$\boxed{\textbf{FI} : (\mathbf{0}) \times (\pm\infty)}$$

Exemples. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star, u_n = n$. *On a :* $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \frac{1}{n}$. *On a alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} u_n \times v_n = 1$
- *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. *On a alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} u_n \times v_n = +\infty$
- *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \frac{(-1)^n}{n}$. *On a alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ *et* $u_n \times v_n = (-1)^n$

$$\boxed{\textbf{FI} : \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \quad \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}}$$

Remarque. ⚠ *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers 0 sans précision sur son signe, on ne peut RIEN dire sur le comportement de la suite* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. *Par contre, si la suite garde un signe constant au cours du temps à partir d'un certain rang, son inverse tend bien vers* $\pm\infty$.

III. 4 Comparaison des suites de référence

Théorème 28. *Croissances comparées :*
Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *et* $\gamma > 0$. *On a :*

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n\gamma}}{n!} = 0$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\beta}{e^{n\gamma}} = 0$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

On peut retenir sous forme résumée qu'en $+\infty$:

$$(\ln n)^\alpha << n^\beta << e^{n\gamma} << n! << n^n.$$

Exercice 29. *Calculer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :*

1. $u_n = \dfrac{-n^2+3n-4}{e^n+n^3-5n}$.
2. $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n^3} \times 2^n$.
3. $u_n = \dfrac{4^n}{n!}$
4. $u_n = \dfrac{2^n+n^2-n-1}{3^n+e^n-n\ln n}$

IV Théorèmes de convergence et de divergence

IV. 1 Théorème sur les suites monotones

Ce théorème est vraiment très important, on l'utilise très souvent.

Théorème 30. *Théorème sur les suites monotones*

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.*
   - *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers une limite finie*
   - *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$*
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.*
   - *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle converge vers une limite finie*
   - *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$*

Exercice 31. *On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+n}$. Montrer que la suite est bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1. Étudier sa monotonie, puis conclure sur sa convergence.*

Exercice 32. *Étudier l'éventuelle convergence des deux suites implicites étudiées au début de ce cours.*

IV. 2 Utilisation d'inégalités

Théorème des gendarmes pour montrer une convergence et obtenir la valeur de la limite :

Théorème 33. *Théorème des gendarmes :*
Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

- *à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$*
- *$u_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$*

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Exemple. *Étudier le comportement de la suite $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:*

Correction. On a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\, |\sin(x)| \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

□

Exercice 34. 1. *Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Étudier la convergence de cette suite.*

2. *Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.*

Théorème de comparaison pour montrer une divergence de première espèce :

Théorème 35. *Théorème de comparaison :*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les hypothèses suivantes :*
   - *à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$*
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

   Alors $v_n \to +\infty$
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les hypothèses suivantes :*
   - *à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$*
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

   Alors $v_n \to -\infty$

Exercice 36. *Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.*

Correction. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ Donc

$$\begin{aligned} S_n &\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\geq n\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\geq \sqrt{n} \end{aligned}$$

Donc

$$S_n \to +\infty$$

□

Exercice 37. *Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^2k}{n^3+k^2}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.*

Passage à la limite dans une inégalité lorsque l'on sait déjà que la suite converge :

Théorème 38. *Théorème de passage à la limite : Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient les hypothèses suivantes :*

- *à partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$

Alors $u \leq v$.

⚠ Ce théorème est de nature différente et ne doit pas être confondu avec les deux théorèmes précédents.

Exemple. *Soit* $0 < q < 1$*. On a* $0 < q^n$*, mais* $\lim q^n = 0$

⚠ Quand on passe à la limite, les inégalités deviennent large !!

Si a partir d'un certain rang $u_n < v_n$ on n'a pas $u < v$.

Exercice 39. *Donner un encadrement des limites des deux suites implicites étudiées au début de ce cours.*

IV. 3 Théorème sur les suites adjacentes

IV. 3. a Définition des suites adjacentes

Définition 40. *Définition de deux suites adjacentes :*
Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. On dit qu'elles sont adjacentes si*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante (ou inversement)*
- $(u_n - v_n) \to 0$

IV. 3. b Théorème des suites adjacentes

Théorème 41. *Soient deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *adjacentes.*
Alors les suites convergent et ont même limite.

Y penser dès que l'on vous demande d'étudier la convergence de deux suites en même temps.

Exercice 42. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose :* $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$*. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.*

Correction. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, elle est donc croissante.
Pour l'étude de la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculons $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{(n)(n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} & < 0
\end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \to 0$$

Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème, elles convergent et ont même limite.

$\square$

IV. 4 Théorème sur les suites extraites

La notion de suite extraite est hors programme, on ne voit le résultat que sur un cas particulier important.

Théorème 43. *Théorème sur les suites extraites :*
Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $l \in \mathbb{R}$.

- *Cas de convergence :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2k} = \ell \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2k+1} = \ell \end{cases}$$

- *Cas de divergence de première espèce :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2k} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2k+1} = +\infty \end{cases}$$

IV. 4. a Utilité 1 : pour montrer une divergence de deuxième espèce :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, il suffit de montrer que les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes.

Exemple. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (-1)^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente de deuxième espèce.*

Correction.$u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ donc les deux suites extraites n'ont pas même limite, ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. (C'est la contraposée de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2k} = \ell \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2k+1} = \ell \end{cases}$,

En effet, on a $NON\left(\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2k} = \ell \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2k+1} = \ell \end{cases}\right)$, ce qui implique $NON(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell)$ $\square$

Exercice 44. *Étudier le comportement à l'infini des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ et $v_n = n(-1)^n$.*

IV. 4. b Utilité 2 : pour montrer une convergence :

Parfois on montre la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le raisonnement suivant :

- On montre que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- Par le théorème sur les suites adjacentes, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite ℓ.
- Par le théorème sur les suites extraites, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 45. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit S_n par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. Conclure quand à la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.*

Correction. On considère $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$. Regardons la monotonie des deux suites.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+1} \\
&= \frac{2n+1-2n-2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&< 0
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \\
&= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\
&= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{-2n-2+2n+3}{(2n+2)(2n+3)} \\
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Enfin

$$\begin{aligned}
u_n - v_n &= S_{2n} - S_{2n+1} \\
&= -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \to 0
\end{aligned}$$

Donc les deux suites sont adjacentes, par théorème, elles convergent et ont même limite. Comme les deux suites S_{2n} et S_{2n+1} convergent et ont même limite, le théorème des suites extraites assure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

IV. 5 Suite et continuité

Théorème 46. *Théorème sur les suites et les fonctions :*
Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction.*
Si

- $u_n \to \ell$ *avec* $\ell \in I$.

Alors $f(u_n) = f(\ell)$

⚠ L'hypothèse de la continuité de f est indispensable :

C-ex : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $f(x) = \lfloor x \rfloor$. On a $u_n \to 1$, $f(1) = 1$ mais $f(u_n) = 0$ donc $f(u_n) \to 0$.
Ainsi $f(u_n) \not\to f(1)$

Exemple. *Calculer les limites éventuelles de la suite définie par :* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_{n+1} = -u_n^2 + 2$.

Correction. On nous demande de calculer les limites éventuelles et non de vérifier i la suite converge (oui c'est subtil, mais c'est différent). On suppose donc que la suite converge, et on cherche sous cette condition quelles sont les limites possibles.

Donc soit ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par uniicité de la limite, u_{n+1} converge aussi vers ℓ. En passant à la limite dans la définition de u_n, on a donc

$$\ell = -\ell^2 + 2.$$

Donc **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, cette limite vérifie

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0$$

Soit

$$\ell \in \{-1, 2\}$$

(ON N A PAS PROUVE QUE LA SUITE CONVERGE VERS L UNE DE CES DEUX VALEURS)

□

V Étude des suites définies par récurrence

Soit une fonction f définie et continue sur $\mathcal{D}_f$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}_f \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Étape 1 : Étude de la fonction f On commence toujours par étudier la fonction f associée à la suite récurrente. On peut en particulier essayer de repérer les intervalles stables par f. Tracer la courbe représentative de f.

On en profite pour étudier $g(x) = f(x) - x$ qui donne beaucoup d'indication sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Étape 2 : Calcul des limites éventuelles de la suite : recherche des points fixes de f
Rédaction type :

- On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l, on obtient : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ \\ f \text{ est continue en } l \text{ comme.......} \end{cases}$
  alors d'après le théorème sur les suites et les fonctions, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient : $l = f(l)$.
- On résout $f(x) = x$ et les solutions trouvées sont les limites éventuelles de la suite.

Remarque. ***Méthodes pour résoudre*** $f(x) = x$ ***:***
- ⋆ *Directement en résolvant l'équation.*
- ⋆ *En étudiant les variations de $g : x \mapsto f(x) - x$ et en résolvant $g(x) = 0$ par le théorème de la bijection.*

Étape 3 : Montrer que la suite est bien définie et que pour tout n $\in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n} \in$ I : Méthode :

Remarque. ***Méthodes pour montrer l'hérédité :***
- ⋆ *En utilisant le fait que I est un intervalle stable par f.*
- ⋆ *Par inégalités successives.*

Étape 4 : Étudier la monotonie de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$:
- **Méthode 1 :** Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$:
  - ⋆ Directement en calculant $u_{n+1} - u_n$.
  - ⋆ En étudiant le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur I.
- **Méthode 2 :** Par récurrence quand la fonction f est croissante sur I.

Étape 5 : Étudier la convergence ou divergence de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$:
1. Pour montrer une convergence :
   - Avec le théorème sur les suites monotones, on montre que la suite converge vers une limite l.
   - Par passage à la limite, on localise précisemment la limite l.
   - Grâce au calcul des limites éventuelles, on obtient la valeur de la limite l.
2. Pour montrer une divergence de première espéce :
   - Avec le théorème sur les suites monotones, on montre que la suite converge vers une limite l ou diverge soit vers $+\infty$ si la suite est croissante soit vers $-\infty$ si la suite est décroissante.
   - Par l'absurde, on suppose que la suite converge vers une limite l.
     Par passage à la limite, on localise alors cette limite l.
     On aboutit alors à une contradiction en comparant la localisation de la limite aux valeurs des limites éventuelles calculées à l'étape 2.
     On conclut à la divergence de la suite soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.
3. Avec le théorème des accroissements finis (plus tard)
4. En utilisant les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:

   Pour ce type d'exercice, vous serez bien guidés.

Exemple. *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

1. *Étudier la fonction* f *associée.*
2. *Calculer les limites éventuelles de la suite.*
3. *On suppose que* $u_0 \in]0,1[$ *:*
   - *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n \in]0,1[$.
   - *Étudier la monotonie de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - *En déduire son comportement à l'infini.*
4. *On suppose que* $u_0 < 0$ *:*
   - *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n < 0$.
   - *Étudier la monotonie de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - *En déduire son comportement à l'infini.*
5. *On suppose que* $u_0 > 1$. *Que peut-on dire sur la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*

Exercice 47. *Étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0 \in [-2,+\infty[$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

Correction.

1. On étudie $f(x) = x(1-x)$.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

On remarque que $[0,1]$ et $]-\infty,0[$ sont des intervalles stables.
C'est-à-dire $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$ pareil pour $]-\infty,0[$.

> **Définition 48.** *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* $I \subset \mathbb{R}$ *est stable par* f *si pour tout* $x \in I$, $f(x) \in I$.

Soit $g(x) = f(x) - x$. Le calcul montre que $f(x) = -x^2$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq 0$ et $g(x) = 0 \iff x = 0$. Ceci implique d'une part que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ($g(x) \leq 0$) et d'autre part que la seule limite possible pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante il y a deux possibiltés : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, et dans ce cas là converge, et donc converge vers 0. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée et dans ce cas là, diverge vers $-\infty$.

Nous allons montrer que selon la valeur de u_0 les deux cas peuvent se produire.

(a) $u_0 \in [0,1]$. Alors comme $[0,1]$ est un intervalle stable par f $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence). En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et donc converge vers 0 d'après ce qu'on vient de voir.

(b) $u_0 \in]-\infty,0[$. Alors comme $u_n \in]-\infty,0[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence) car $]-\infty,0[$ est un intervalle stable par f. On va montrer par l'absurde que $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$. Supposons donc par l'absurde que la suite est minorée. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, par théorème $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Par ailleurs comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$ on a $\lim_{n\to\infty} u_n \leq u_0 < 0$. Or la seule limite possible est 0. C'est donc absurde. Ainsi $u_n \to -\infty$.

(c) Enfin, si $u_0 > 1$, $u_1 < 0$ d'après l'étude de f. Donc on peut appliquer ce qu'on a fait dans le dernier paragraphe à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Elle diverge donc vers $-\infty$.

$\square$