Table des matières

Chapitre 3 : Vocabulaire de la logique et des ensembles

I Logique

I. 1 Notion de proposition

Définition 1. *Une propriété est un énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguité s'il est vrai ou faux.*

Exemples :
- P_1 : $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- P_2 : $2 < 1$.
- P_3 : π est un entier.
- P_4 : $\sin$ est une fonction paire.

Une propriété peut dépendre de paramètres
Exemples :
- $P_1(x) : x \geq 1$.
- $P_2(z) : |z| = 1$.

I. 2 Opérations sur les propositions

Il existe 3 opérateurs logiques élémentaires qui permettent de créer de nouvelles propriétés.

I. 2. a Opérateur ***NON***

Définition 2. *Soit P une proposition. La proposition* ***NON*** *P, appelée négation de P, est la proposition fausse si P est vraie, et vraie si P est fausse.*

⚠ La négation a une vraie valeur logique qui n'est pas forcément la même que la valeur dans le langage français courant de 'opposée' :

Exemples :

- Soit P la proposition : 'La fonction f est croissante'. On a alors NON P : 'la fonction f n'est pas croissante'. En particulier, ceci ne signifie pas 'la fonction f est décroissante'.
- Soit P la proposition : 'Tous les mercredi, il y a DS'. On a alors NON P : 'Il existe au moins un mercredi ou il n'y a pas DS.' En particulier, ceci ne signifie pas 'Les DS n'ont pas lieu le mercredi'.
- NON $(x = 1)$: x différent de 1.
- NON $(x > 0)$: x inférieur ou égal à 0 $(x \leq 0)$.

On verra d'autres exemples une fois que l'on aura vu les quantificateurs.

I. 2. b Opérateur ***OU***

Définition 3. *Soient P, Q deux propositions. La proposition P* ***OU*** *Q, est la proposition vraie si soit P soit Q est vraie, et fausse sinon.*

Exemples :
- (la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) ou (la fonction $\sin$ est paire) est VRAIE.
- (3<0) ou (π est un entier) est FAUSSE.
- (la fonction $\sin$ est impaire) ou (la fonction $\cos$ est paire) est VRAIE

I. 2. c Opérateur ***ET***

Définition 4. *Soient P, Q deux propositions. La proposition P* ***ET*** *Q, est la proposition vraie si à la fois P et Q sont vraies, et fausse sinon.*

Exemples :
- (la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) et (la fonction $\sin$ est paire) est FAUSSE.
- (3<0) et (π est un entier) est FAUSSE.
- (la fonction $\sin$ est impaire) et (la fonction $\cos$ est paire) est VRAIE

I. 3 Implication et équivalence

Définition 5. *Soient P, Q deux propositions. On définit '$P \Longrightarrow Q$' par '**NON**(P) **OU** Q'. On dit que P implique Q.*

Heuristiquement ceci correspond à dire que P 'est plus forte que' Q : Si P est vraie alors nécessairement Q est vraie. En revanche si P est fausse on ne peut rien dire sur Q. A partir d'un postulat faux on peut arriver à tout et n'importe quoi !

De manière pratique, pour prouver une implication on s'intéressera seulement au cas où P est vraie.

Remarque : La relation d'implication est transitive : Soient P, Q, R trois propositions. Si $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow R$ alors $P \Longrightarrow R$.

Exemples :
- $(x \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (x^2 > 0)$ est fausse.
- $(x = y) \Longrightarrow (x^2 = y^2)$ est vraie.

Définition 6. *Soient P, Q deux propositions. On définit $'P \Longleftrightarrow Q'$ par $'P \Longrightarrow Q$ **ET** $Q \Longrightarrow P'$. On dit que P équivaut à Q.*

Dans ce cas, P est vraie si et seulement si Q est vraie.

I. 4 Opérations sur les propositions

Proposition 7. *Avec les opérateurs **ET** et **OU** :*
- ***NON*** $(P$ ***OU*** $Q) = P$ ***ET*** Q
- ***NON*** $(P$ ***ET*** $Q) = P$ ***OU*** Q
- P ***ET*** $(Q$ ***OU*** $R) = (P$ ***OU*** $Q)$ ***ET*** $(P$ ***OU*** $R)$
- P ***OU*** $(Q$ ***ET*** $R) = (P$ ***ET*** $Q)$ ***OU*** $(P$ ***ET*** $R)$

Remarque : On dit que le **ET** est distributif sur le **OU** et que le **OU** est distributif sur le **ET** .

Exemples : Donner la négation de l'affirmation « Fromage OU Dessert ».

Proposition 8. *Avec l'opérateur $\Longrightarrow$:*
- $(P \Longrightarrow Q) =$ ***NON***$(Q) \Longrightarrow$ ***NON***(P)
- ***NON*** $(P \Longrightarrow Q) = P$ ***ET NON***(Q)

II Méthodologie

On s'intéresse ici aux différentes méthodes pour prouver que $P \Longrightarrow Q$. En règle générale pour prouver que $P \Longleftrightarrow Q$ on prouvera que $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$, appliquant deux fois les techniques sous-mentionées. On pourra tout de même parfois se simplifier la tâche et raisonner par équivalences successives ($P \Longleftrightarrow P_1 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow P_n \Longleftrightarrow Q$). On fera TRES attention de s'assurer que les équivalences écrites sont bien des équivalences et non des implications (tout le monde se fera avoir au moins une fois...). De plus, si l'énoncé demande une implication, on ne s'amusera pas à chercher une équivalence.

II. 1 Méthode directe

Schéma de preuve :
- On part d'une proposition P.
- On écrit une série d'implications.
- On obtient Q.

Exemples :

- Montrer que pour tout entier n, $\left(n \geq 2 \Rightarrow n + \frac{1}{n} \geq 2\right)$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair alors n^2 est impair.

II. 2 Contraposée

On utilise la Proposition 8. Au lieu de prouver $P \Longrightarrow Q$ on prouve **NON**$(P) \Longrightarrow$ **NON**(Q) qui lui est équivalent.

Schéma de preuve :

- On part de la proposition **NON**(Q).
- On écrit une série d'implications.
- On obtient **NON**(P).

Exemples :

- Si $x^3 = 2$ alors $x < 2$.
- Si $n^2 \in \mathbb{N}$ est pair alors n est pair.

II. 3 Absurde

On utilise la Proposition 8. Au lieu de prouver $P \Longrightarrow Q$ on prouve que P **ET NON**(Q) est fausse.

Schéma de preuve :

- On part de la proposition P **ET NON**(Q).
- On écrit une série d'implications.
- On obtient quelque chose de faux.

Justifions cela proprement. Soit A la proposition P **ET NON**(Q) et B la proposition de conclusion qui est fausse. Par transitivité de l'implication, le schéma de preuve dit que $(A \Longrightarrow B)$ est vraie. C'est à dire (**NON**(A) **OU** B) est vraie. Or comme B est fausse, (**NON**(A) **OU** B) est vraie si et seulement si **NON**(A) est vraie, donc A est fausse.

Dire que **NON**$(P$ **ET NON**$(Q))$ est fausse, équivaut à **NON**(P) **OU** Q est vraie, c'est-à-dire $P \Longrightarrow Q$ (ouf !)

Exemples :

- (Le grand classique) $\sqrt{2}$ est irrationel.
- Si $x \in \mathbb{N}$ est entier alors $x + \dfrac{1}{2}$ n'est pas entier.

II. 4 Récurence

- **On définit clairement la propriété à démontrer :**
  Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: ......
- **Initialisation :** pour $n = n_0$:
  On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $n \geq n_0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  ⚠ N'oubliez pas de signaler l'endroit où vous utilisez l'hypothèse de récurrence.
- **Conclusion :**
  Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$.

Exemples : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

⚠ Vous verrez des récurrences toutes l'année et l'année prochaine. Sachez les faire correctement ! Dans quasiment tous les sujets de concours, il y aura (au moins) une récurrence.

III Ensemble

III. 1 Notations - Exemples

> **Définition 9.** *Un ensemble E est une collection d'objets distincts appelés **éléments** de E*
> *Si a est un élément de E on note $a \in E$. Un ensemble avec un seul élément est appelé **singleton**, il est noté $\{a\}$.*
> *L'ensemble contenant aucun élément est appelé **ensemble vide** il est noté $\emptyset$.*

Exemples :
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} := \{0, 1, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. e.g. p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ and $q \in \mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. e.g. $0, \pi, \sqrt{2}, 28 + \log(2)$...
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On rajoute i et les sommes de réel avec i
- On notera par une * ces ensembles privés de 0. On notera par $_+$ ces ensembles restreint aux nombres positifs (évidemmnet cela ne concerne pas $\mathbb{C}$.)

Souvent les ensembles sont contruits par 'compréhension', c'est-à-dire que l'on considère un sous-ensemble d'un certain E vérifiant une propriété P. On note dans ce cas $\{x \in E \,|\, P\}$.

Exemples :
- $E = \{1, 2, 12\}$.
- $E = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{12\}, \{1, 2\}, \{1, 12\}, \{2, 12\}, \{1, 2, 12\}\}$.
- $E = \{Pile, Face\}$.
- $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4 \geq 27\}$.
- $E = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + i| = 1\}$.

On verra que les ensembles se comportent alors en un certain sens comme des propositions...

> **Définition 10.** *Soient E, F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.*

Exemples :
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{N}^* \subset \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 1/2\}$

Pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, on utilisera généralement un raisonnement direct. Par exemple si $E = \{x \in \mathcal{E} \,|\, P(x)\}$, et $F = \{x \in \mathcal{E} \,|\, Q(x)\}$, on pourra adopter une rédaction du type :

Soit $x \in E$. Par définition x vérifie $P(x)$. D'après le théorème Truc, $P(x)$ implique $P'(x)$. Or $P'(x)$ blablabla implique $Q(x)$. Donc $x \in F$.

Exemple :
- Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$. Montrer que l'on a : $A \subset B$.

Définition 11. *Soient E, F deux ensembles. On dit que E est égal à F et on note $E = F$ si les eléments de F sont exactement les éléments de E.*

Pour montrer que deux ensembles sont égaux on pourra utiliser la double inclusion. ($E \subset F$ et $F \subset E$) $\iff E = F$.

Exemple :
- Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0 \text{ et } x - y + 3z = 0\}$. Montrer que l'on a : $A = B$.

III. 2 Quantificateurs

III. 2. a Définition et usage

Définition 12. *Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété.*
- *$\forall$ se lit 'quelque soit' Si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$, on écrit : $\forall x \in E,\ P(x)$*
- *$\exists$ se lit 'il existe' Si $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$, on écrit : $\exists x \in E,\ P(x)$*
- *$\exists!$ se lit 'il existe un unique' Si $P(x)$ est vraie pour un unique élément $x \in E$, on écrit : $\exists! x \in E,\ P(x)$*

TOUTES LES VARIABLES[1] DOIVENT ETRE QUANTIFIEES.
On quantifie les variables avant de les considérer dans les propositions. On écrit donc $\forall x \in E, P(x)$ et NON PAS $\cancel{P(x), \forall x \in E}$

Exemples :
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \implies |u_n - 1| \leq \epsilon$.
- Rappelons $P_1(x) : x \geq 1$. On a $'\exists x \in \mathbb{R}, P_1(x)'$ est vraie mais $'\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x)'$ est fausse.

L'ORDRE DES QUANTIFICATEURS EST IMPORTANT.
Plus précisément :
Si ils sont de nature différente, leur ordre est important et on ne peut pas modifier cet ordre :

Exemple :
- P : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$: est Vraie.
- Q : $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x$: est Fausse

- $\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0,\ n \geq N_0 \implies |u_n - 1| \leq \epsilon$.

Mais si ils sont de mêmes natures l'ordre n'est pas important :
- $\forall x \in E,\ \forall x' \in E',\ P(x, x') \iff \forall x' \in E',\ \forall x \in E,\ P(x, x')$
- $\exists x \in E,\ \exists x' \in E',\ P(x, x') \iff \exists x' \in E',\ \exists x \in E,\ P(x, x')$.
- $\exists! x \in E,\ \exists! x' \in E',\ P(x, x') \iff \exists! x' \in E',\ \exists! x \in E,\ P(x, x')$.

LES QUANTIFICATEURS NE PEUVENT PAS ETRE INTERCHANGES

Exemples :
- $\exists \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \implies |u_n - 1| \leq \epsilon$.
- $\forall \epsilon > 0,\ \forall N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \implies |u_n - 1| \leq \epsilon$.
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \implies |u_n - 1| \leq \epsilon$.

1. Sauf les variables 'muettes' celles se trouvant au sein d'une focntion mathématique telles que $\sum_{k=0}^{n}$ (ici k est muet mais pas n) ou $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ici x est muet.) Ces variables sont 'muettes' car elles n'ont pas de valeurs bien définies, et ne servent qu'à l'utilisation du symbole mathématiques sous-jacent.

- $\exists \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.$

⚠ ON N'UTILISERA PAS LES QUANTIFICATEURS A LA PLACE DU FRANCAIS. Tirer du programme officiel : « L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire. » Cette mise en garde s'applique aussi pour les opérateurs $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$.

III. 2. b Négation et quantificateurs

Comme on est amené parfois à considérer des négations de propositions il est bon (nécessaire, important, fondamental, exigible, obligatoire, primordial, apodictique !) de savoir obtenir la négation d'une proposition contenant des quantificateurs.

Heureusement c'est assez simple : la négation d'un 'pour tout' est 'il existe', et vice-versa, la négation d'un 'il existe' est 'pour tout'.

$$\textbf{NON}(\forall x \in E,\ P(x)) = \exists x \in E,\ NON(P(x))$$
$$\textbf{NON}(\exists x \in E,\ P(x)) = \forall x \in E,\ NON(P(x))$$

Exemples :

- $\textbf{NON}\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0\Big) = \exists x \in \mathbb{R}, \exp(x) \leq 0$
- $\textbf{NON}\Big(\forall t \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq t\Big) = \exists t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq t$
- $\textbf{NON}\Big(\exists t \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}^*, \cos(n) = t\Big) = \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(n) \neq t$

Mais parfois c'est tout de même un peu subtil :

Exemples :

- $\textbf{NON}\Big(\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \epsilon.\Big) = \exists \epsilon > 0,\ \forall N_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}_0, n \geq N_0$ **ET** $|u_n - 1| \geq \epsilon.$)

III. 3 Opérations sur les ensembles

III. 4 Union, intersection, complémentaire

III. 4. a Définition

Définition 13. *Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.*

- *L'union de A et B est notée $A \cup B$. Il est défini par l'ensemble des éléments qui sont dans A OU dans B.*
- *L'intersection de ces deux ensembles est notée $A \cap B$. Il est défini par l'ensemble des éléments qui sont dans A ET dans B.*
  Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoint
- *Le complémentaire de A dans E, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des élements de E qui ne sont pas dans A.*
- *$A \setminus B$ est l'ensemble des élements de A qui ne sont pas dans B.*

Remarques :

- On peut généraliser la définition de l'union et de l'intersection à plusieurs ensembles (et même à une infinité).
- ⚠ Lorsqu'il y a une ambiguité sur le domaine de référence E, on note parfois $\mathcal{C}_E(A) = \overline{A}$. Faire un dessin pour bien comprendre que $\mathcal{C}_E(A) \neq \mathcal{C}_F(A)$.

Exercice

- On définit $E=\mathbb{R}$, $A=]0,1]$, $B=],2]$ et $C=[-4,]$. Calculer $A\cup B$, $A\cup B\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $A\cap B\cap C$, $\mathcal{C}_E(A)$, $\mathcal{C}_{[0,1]}(A)$, $A\setminus B$, $B\setminus C$ et $A\setminus C$.
- On définit $E=\mathbb{R}$, $A=]-\infty,-3]\cup[1,+\infty[$, $B=]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[$ et $C=\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}$. Calculer $A\cup B\cup C$ et $A\cap B\cap C$.

Exercice Soient E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E.

- Montrer que $A\subset B \Longrightarrow (A\cup B)\subset(B\cup C)$.
- On suppose que $A\cup B=A\cup C$ et que $A\cap B=A\cap C$. Montrer que $B=C$.

III. 4. b Propriétés

Proposition 14. *Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E.*

- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Proposition 15. *Lois de Morgan.*
Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E.

- $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
- $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

On remarquera ici la dualité avec les opérations **OU** , **ET** ,**NON** que l'on a vu sur les propositions. Soient P,Q,R trois propositions. Soit E un ensemble et soient A,B,C trois sous-ensembles de E définis par $A=\{x\in E\,|\,P(x)\},B=\{x\in E\,|\,P(x)\},C=\{x\in E\,|\,P(x)\},$. On a alors :

- $\overline{A}=\{x\in E\,|\,\textbf{NON}P(x)\}$
- $A\cup B=\{x\in E\,|\,P(x)\ \textbf{OU}\ Q(x)\}$
- $A\cap B=\{x\in E\,|\,P(x)\ \textbf{ET}\ Q(x)\}$

On en déduit donc à partir des règles sur les propositions les règles sur les ensembles :

$$\begin{aligned}
A\cap(B\cup C) &= \{x\in E\,|\,P(x)\}\cap\{x\in E\,|\,Q(x)\ \textbf{OU}\ R(x)\}\\
&= \{x\in E\,|\,P(x)\ \textbf{ET}\ \Big(Q(x)\ \textbf{OU}\ R(x)\Big)\}\\
&= \{x\in E\,|\,\Big(P(x)\ \textbf{ET}\ Q(x)\Big)\ \textbf{OU}\ \Big(P(x)\ \textbf{ET}\ R(x)\Big)\}\\
&= \{x\in E\,|\,(P(x)\ \textbf{ET}\ Q(x))\}\cup\{x\in E\,|\,(P(x)\ \textbf{ET}\ R(x))\}\\
&= (A\cap B)\cup(A\cap C)
\end{aligned}$$

Il suffit dont d'en apprendre qu'un sur les deux... ;-) (Il FAUT évidemment comprendre suffisament bien le fonctionnement du passage de l'un à l'autre pour se permettre une telle chose)

III. 5 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 16. *Ensemble des parties d'un ensemble :*

- *On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles composés d'éléments de E.*

Exemples :

- Si $E=\{a,b,c\}$ alors $\mathcal{P}(E)=$ ....
- Si $E=\{a\}$ alors $\mathcal{P}(E)=$..

III. 6 Produit cartésien d'ensembles

Définition 17. *Soient E et F deux ensembles.*

- *$E \times F$ est l'ensemble de toutes les paires d'éléments, notée (x, y), tel que x est un élément de E et y un élément de F*

- *Si $E = F$, on note E^2*

Exemples :

- $\mathbb{R}^2 =$
- Si $E = F = [0, 1]$ alors $E^2 =$
- Si $E = \{0, 1\}$ et $F = \{2, 3\}$ alors $E \times F =$
- Un facteur sanguin est un couple constitué d'un groupe sanguin et d'un rhésus (par exemple O^-). L'ensemble des facteurs sanguins peut s'écrire $\{O, A, B, AB\} \times \{+, -\}$.

Définition 18. *Généralisation à plusieurs ensembles :*
Soient $E_1,\ E_2, \ldots, E_n$ des ensembles.

- *$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble de toutes les combinaisons $(e_1, ..., e_n)$ où e_i est un élément sde E_i, $i \in \{1, ..., n\}$.*
- *$\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ est noté E^n.*

Remarque : Un élément de E^p est appelé une p-liste de E.

Exemples :

- $\mathbb{R}^3 =$
- L'ensemble des résultats possibles de 5 tirages de dés consécutifs est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^5$.

III. 7 Partitions

Définition 19. *Soit E un ensemble. Soient $A_1, ..., A_n$ des sous-ensembles de E. On dit que les A_i sont une partition (ou un système complet) de E si*

1. $\forall i, j \in [[1, n]],\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$.

Exemples :

- Exemple de partition de $\mathbb{N}$: ....
- Exemple de partition de $\mathbb{N}$: ....
- Exemple de partition de $\mathbb{R}$: ....
- Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. Donner un exemple de partition de E avec deux puis trois ensembles :
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....
- Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Alors .... est une partition de E.