Devoir Surveillé 1 :
Mercredi 16 Septembre 2020

Durée 2h30.

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les résultats...)

Exercice 1. 1. Comparer (avec une inégalité large) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres n et 3^n. (Prouver cette inégalité)

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

   (a) Enoncer l'inégalité triangulaire.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 4^n$.

Correction.

1. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : n \leq 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $0 \leq 3^0 = 1$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang 0.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a par hypothèse de récurrence :
$$n + 1 \leq 3^n + 1$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq 2 \times 3^n$ donc
$$3^n + 1 \leq 3 \times 3^n = 3^{n+1}$$
La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n + 1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:
$$\boxed{\mathcal{P}(n) : n \leq 3^n}$$

2. (a) Cf cours $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

   (b) On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : |u_n| \leq 4^n$ et $|u_{n+1}| \leq 4^{n+1}$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $|u_0| = 1 \leq 4^0 = 1$ et $|u_1| = 3 \leq 4^1$. La propriété est vraie au rang 0.
   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$: « $|u_{n+1}| \leq 4^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leq 4^{n+2}$ » est vraie.

$u_{n+1} \leq 4^{n+1}$ par hypothèse de récurrence. Il suffit donc de montrer que $|u_{n+2}| \leq 4^{n+2}$. On a

$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= |3u_{n+1} - 2u_n| \quad \text{par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= |3u_{n+1}| + |2u_n| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq 3 * 4^{n+1} + 2 * 4^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\leq 4^n(3 * 4 + 2) \\
&\leq 4^n(14) \\
&\leq 4^n(4^2) \\
&\leq 4^{n+2}
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : |u_n| \leq 4^n}$$

□

Exercice 2 (Suite de Fibonacci)**.** Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Correction.

1. Nous allons montrer ces propriétés par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la prorpriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) := \text{« } \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \text{ ».}$$

   Montrons $\mathcal{P}(0)$. Vérifions la première égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k+1} = F_{0+1} = F_1 = 1$$

   et

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1$$

   Donc la première égalité est vraie au rang 0.
   Vérifions la sedonde égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k} = F_0 = 0$$

   et

$$F_{2*0+1} - 1 = F_1 - 1 = 0$$

Donc la seconde égalité est vraie au rang 0. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons la première égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2n+3}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} &= F_{2n+2} + F_{2n+3}. \\ &= F_{2n+4}. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= F_{2(n+1)+2}.\end{aligned}$$

La première égalité est donc héréditaire.
Considérons la sedonde égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k} + F_{2n+2}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2}. \\ &= F_{2n+3} - 1. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= F_{2(n+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

La seconde égalité est donc héréditaire. Finalement la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1}$$

2. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} F_k^2 = F_0^2 = 0$ et $F_0 F_1 = 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.
   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n.

On a $\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2$ Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} \quad \text{par définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}}$$

3. Le polynôme du second degrès $X^2 - X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ les racines sont donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En particulier, ces nombres vérifient : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ et $\psi^2 - \psi - 1 = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ et } \psi^2 = \psi + 1.}$$

4. Notons :$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ On a

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \psi^0) = 0$$
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \psi^1) = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi^2) - \psi^n(\psi^2)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi+1) - \psi^n(\psi+1)) \quad \text{D'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + \varphi^n - \psi^{n+1} - \psi^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \psi^n) \\ &= u_{n+1} + u_n\end{aligned}$$

Donc u_n satisfait aussi la relation de récrurrence. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

5. D'après la question précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \varphi\frac{\varphi^n\left(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\right)}{\varphi^n\left(1 - \frac{\psi^n}{\varphi^n}\right)} \\ &= \varphi\frac{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}\end{aligned}$$

Remarquons que $|\varphi| > |\psi|$ en particulier $|\frac{\psi}{\varphi}| < 1$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1} = 0.$$

Finalemetn

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.}$$

□

Exercice 3 (Equation à paramètre)**.** On note $\Delta(m) = m^2 - 8m + 12$.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue m :
$$\Delta(m) > 0 \tag{I_1}$$
2. On note $r_+(m) = \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4}$ et $r_-(m) = \frac{m-\sqrt{\Delta(m)}}{4}$.
3. Résoudre
$$r_+(m) \geq 1 \quad \text{et} \quad r_-(m) \geq 1.$$
4. Résoudre l'inéquation d'inconnue y et de paramétre $m \in \mathbb{R}$
$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \tag{I_2}$$

Correction.

1. Le discriminant réduit de $\Delta(m)$ vaut $\delta(m) = 16 - 12 = 4$. Les racines de $\delta(m)$ valent donc $m_1 = 4 - 2 = 2$ et $m_2 = 4 + 2 = 6$. Donc $\Delta(m) = (m-2)(m-6)$ et les solutions de $\Delta(m) > 0$ sont
$$\mathcal{S} =]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[.$$
2. Les expressions $r_+(m)$ et $r_-(m)$ sont définies pour $\Delta(m) \geq 0$ soit $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$. Résolvons $r_+(m) \geq 1$ pour $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
$$\begin{aligned} & \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4} \geq 1 \\ \iff & m + \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 \\ \iff & \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 - m \end{aligned}$$

   Si $\underline{(4-m) < 0}$, m est solution car $\sqrt{\Delta(m)} \geq 0$.

   Si $\underline{(4-m) \geq 0}$, l'équation $r_+(m) \geq 1$ est équivalente à
$$\begin{aligned} & \Delta(m) \geq (4-m)^2 \\ \iff & m^2 - 8m + 12 \geq m^2 - 8m + 16 \\ \iff & 0 \geq 4 \end{aligned}$$

   Donc pour tout $m \leq 4$, m n'est pas solution.
   Finalement, les solutions de $r_+(m) \geq 1$ sont
$$\mathcal{S}_+ = [6, +\infty[.$$

Résolvons $r_-(m) \geq 1$ pour $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.

$$\begin{aligned} & \frac{m - \sqrt{\Delta(m)}}{4} \geq 1 \\ \iff \quad & m - \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 \\ \iff \quad & m - 4 \geq \sqrt{\Delta(m)} \end{aligned}$$

Si $\underline{(m-4) < 0}$, m n'est pas solution car $\sqrt{\Delta(m)} \geq 0$.

Si $\underline{(m-4) \geq 0}$, l'équation $r_-(m) \geq 1$ est équivalente à

$$\begin{aligned} & (m-4)^2 \geq \Delta(m) \\ \iff \quad & m^2 - 8m + 16 \geq m^2 - 8m + 12 \\ \iff \quad & 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $m \geq 4$, m est solution.
Finalement, les solutions de $r_-(m) \geq 1$ sont

$$\mathcal{S}_+ = [6, +\infty[.$$

3. L'ensemble de définition de $\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1}$ est $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On va résoudre

$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \qquad (I_4(m))$$

en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

Pour tout $y \in D_1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} - \frac{m(y-1)}{y-1} &\geq 0 \\ \frac{2y^2 - \frac{3}{2} - m(y-1)}{y-1} &\geq 0 \\ \frac{2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)}{y-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $2y^2 - my + (\frac{3}{2} + m)$ vaut

$$m^2 - 4(2)(-\frac{3}{2} + m) = m^2 - 8m + 12.$$

On reconnait l'expression de $\Delta(m)$.

(a) D'après la question 1, $\Delta(m) > 0$ pour $m \in]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[$. Sur cet ensemble le polynôme $2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)$ admet deux racines, $r_-(m)$ et $r_+(m)$. Donc

$$2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m) = 2(y - r_-(m))(y - r_+(m)).$$

Pour $m \geq 6$, d'après la question 2, on a :

$$r_+(m) \geq r_-(m) \geq 1$$

On note $q(y) = 2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)$

y	$-\infty$		1		$r_-(m)$		$r_+(m)$		$+\infty$
$q(y)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{q(y)}{y-1}$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'équation $I_4(m)$ pour $m \geq 6$ sont

$$\boxed{S =]1, r_-(m)] \cup [r_+(m), +\infty[}$$

Pour $m \leq 2$, d'après la question 2, on a :

$$1 \geq r_+(m) \geq r_-(m)$$

y	$-\infty$		$r_-(m)$		$r_+(m)$		1		$+\infty$
$q(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$y-1$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{q(y)}{y-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

Les solutions de l'équation $I_4(m)$ pour $m \leq 2$ sont

$$\boxed{S = [r_-(m), r_+(m)] \cup]1, +\infty[.}$$

4. Pour $\Delta(m) = 0$, c'est-à-dire $m \in 2, 6$. Pour $m = 2$, on a $r_+(2) = r_-(2) = \frac{1}{2}$ et

$$2y^2 - 2y + (-\frac{3}{2} + 2) = 2(y - \frac{1}{2})^2$$

et les solutions de I_2 sont donc

$$\boxed{S = \{\tfrac{1}{2}\} \cup]1, +\infty[.}$$

Pour $m = 6$, on a $r_+(6) = r_-(6) = \frac{3}{2}$ et

$$2y^2 - 6y + (-\frac{3}{2} + 6) = 2(y - \frac{3}{2})^2$$

et les solutions de I_2 sont donc

$$\boxed{S =]1, +\infty[.}$$

5. Pour $\Delta(m) < 0$, c'est-à-dire $m \in]2, 6[$.
Le polynome q n'a pas de racine réelle. Il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. Les solutions de $I_4(m)$ sont donc

$$\boxed{S =]1, +\infty[.}$$

□

Exercice 4 (Partie entière)**.** On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de E.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
3. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre (E).

Correction.

1. La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc l'expression $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor$ pour tout x tel que $5x - 1 \geq 0$.

$$\boxed{\text{L'équation est définie pour } x \geq \tfrac{1}{5}.}$$

2. Cf cours. Par définition, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ donc

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathbb{R},\ a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a.}$$

3. On a pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor = 0$ si et seulement si $0 \leq y < 1$. Donc, résoudre E revient à résoudre

$$\boxed{\begin{cases} 2x - \sqrt{5x-1} < 1 & (I_1) \\ 2x - \sqrt{5x-1} \geq 0 & (I_2) \end{cases}}$$

4. Résolvons (I_1) :

$$2x - \sqrt{5x-1} < 1 \quad \iff \quad 2x - 1 < \sqrt{5x-1}$$

Si $\underline{2x - 1 < 0 \text{ et } x \geq \frac{1}{5}}$, x est solution de I_1. Remarquons que $2x - 1 < 0$ et $x \geq \frac{1}{5}$ se simplifie en $x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}[$.

Si $\underline{2x - 1 \geq 0 \text{ et } x \geq \frac{1}{5}}$, (I_1) est équivalente à

$$4x^2 - 4x + 1 < 5x - 1 \quad \iff \quad 4x^2 - 9x + 2 < 0$$

Le discriminant de $4x^2 - 9x + 2$ vaut $\Delta = 81 - 32 = 49$.
Les racines de $4x^2 - 9x + 2$ valent donc

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

.
Donc $4x^2 - 9x + 2 = 4(x-2)(x - \frac{1}{4})$.
Le polynôme $4x^2 - 9x + 2$ est donc strictement négatif sur $U_1 =]\frac{1}{4}, 2[$. Sous la condition ($2x - 1 \geq 0$ et $x \geq \frac{1}{5}$), les solutions de (I_1) sont donc $S = [\frac{1}{2}, 2[$.
En conclusion l'ensemble des solutions de (I_1) est

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, 2\right[= \left[\frac{1}{5}, 2\right[.}$$

5. Résolvons (I_2) :

$$2x - \sqrt{5x-1} \geq 0 \quad \iff \quad 2x \geq \sqrt{5x-1}$$

Si $\underline{2x < 0 \text{ et } x \geq \frac{1}{5}}$, x n'est pas solution de I_2, car $\sqrt{5x-1} \geq 0$.

Si $\underline{2x \geq 0 \text{ et } x \geq \frac{1}{5}}$, (I_2) est équivalente à

$$4x^2 \geq 5x - 1 \quad \iff \quad 4x^2 - 5x + 1 \geq 0$$

Le discrimant de $4x^2 - 5x + 1$ vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$.
Les racines de $4x^2 - 5x + 1$ valent donc

$$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}.$$

Donc $4x^2 - 5x + 1 = 4(x-1)(x-\frac{1}{4})$, le polynôme $4x^2 - 5x + 1$ est donc positif sur $U_2 = \left]-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup [1, +\infty[$.
Sous la condition ($2x \geq 0$ et $x \geq \frac{1}{5}$), les solutions de (I_2) sont donc $S = U_2 \cap [\frac{1}{5}, +\infty[= \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup [1, +\infty[$
En conclusion l'ensemble des solutions de (I_1) est

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup [1, +\infty[}$$

6. Le réel x est solution de l'équation (E) si et seulement si il est solution de (I_1) et (I_2). C'est-à-dire :

$$x \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$$

L'ensemble des solutions de E est donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup [1, 2[.}$$

□