Devoir Surveillé 2 : Correction

Exercice 1. *1. A quelle condition sur $X, Y \in \mathbb{R}$ a-t-on*

$$X = Y \iff X^2 = Y^2$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$ l'équation :

$$|\cos(x)| = |\sin(x)|. \tag{1}$$

Correction.

1. On a $X = Y \iff X^2 = Y^2$ si X et Y sont de même signe.
2. Comme $|\cos(x)| \geq 0$ et $|\sin(x)| \geq 0$ l'équation est équivalente à $\cos^2(x) = \sin^2(x)$, soit encore

$$\cos(2x) = 0.$$

On a donc $2x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ ou encore

$$x \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\frac{\pi}{2}]$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in Z} \{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\}$$

Sur $[-\pi, \pi[$ les solutions sont :

$$\mathcal{S} \cap [-\pi, \pi[= \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}\}$$

□

Exercice 2. *Résoudre l'inéquation d'inconnue x :*

$$\frac{\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} \leq x + \frac{1}{2}$$

Résoudre sur $[0, 2\pi[$:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin(x) - \frac{1}{2}} \leq \sin(x) + \frac{1}{2}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ l'inéquation est équivalente à

$$\frac{\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} - \frac{(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \leq 0$$

D'où

$$\frac{-x^2 + \frac{3}{4}}{x - \frac{1}{2}} \leq 0$$

$$\frac{(x - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2})}{x - \frac{1}{2}} \geq 0$$

Les solutions sont

$$\mathcal{S} = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}[\cup[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[.$$

En posant $X = \sin(x)$, x est solution de la seconde inéquation si et seulement si

$$\sin(x) \in \mathcal{S}$$

On résoud donc

$$\sin(x) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}[\cup[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$$

Comme $\sin(x) \leq 1$ ceci équivaut à

$$\sin(x) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}[\cup[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

Sur $[0, 2\pi[$ on a donc

$$x \in [0, \frac{\pi}{6}[\cup[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]\cup]\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$$

□

Exercice 3. *Soit $1 > \epsilon > 0$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leq 1 - \epsilon$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = i + u$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$z_{n+1} = z_n^2 - 2iz_n - 1 + i$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$. En déduire la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} - i = z_n^2 - 2iz_n - 1 = (z_n - i)^2$$

.

On va procéder par récurrence. Pour $n = 0$ on a

$$|z_0 - i| = |u| \leq 1 - \epsilon = (1-\epsilon)^{2^0}$$

Supposons donc qu'il existe n tel que $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$ et montrons l'inégalité pour $(n+1)$
On a

$$z_{n+1} - i = z_n^2 - 2iz_n - 1 = (z_n - i)^2.$$

Donc

$$|z_{n+1} - i| = |z_n - i|^2,$$

D'après l'hypothése de récurrence on a $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$, d'où

$$|z_n - i|^2 \leq \left((1-\epsilon)^{2^n}\right)^2 = (1-\epsilon)^{2\times 2^n}$$

C'est à dire

$$|z_{n+1} - i| \leq (1-\epsilon)^{2^{n+1}}$$

L'inégalité est donc héréditaire et la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $|1-\epsilon| < 1$ on a $\lim_{n\to\infty}(1-\epsilon)^{2^{n+1}} = 0$ donc

$$\lim_{n\to\infty} z_n = i.$$

□

Exercice 4. *Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$*

1. *Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$*
2. *Montrer que pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a*
$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$
3. *En déduire que $\overline{A} = B$.*
4. *Montrer que la partie imaginaire de A est strictement positive. (On pourra montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.)*
5. *Rappelons la valeur de la somme d'une suite géométrique : $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$:*
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
Montrer alors que $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
6. *Montrer que $AB = 2$.*

7. *En déduire la valeur exacte de A.*

Correction.

1.
$$\frac{1}{\omega} = e^{\frac{-2i\pi}{7}} = \overline{\omega}$$

2. On a $\omega^7 = e^{7\frac{2i\pi}{7}} = e^{2i\pi} = 1$ donc pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a
$$\omega^{7-k}\omega^k = 1$$
D'où
$$\omega^k = \frac{1}{\omega^{7-k}} = \overline{\omega}^{7-k}$$

3. On a d'après la question précédente :
$$\overline{\omega} = \omega^6$$
$$\overline{\omega^2} = \omega^5$$
$$\overline{\omega^4} = \omega^3$$
Ainsi on a :
$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\omega + \omega^2 + \omega^4} \\ &= \overline{\omega} + \overline{\omega^2} + \overline{\omega^4} \\ &= \omega^6 + \omega^5 + \omega^3 \\ &= B.\end{aligned}$$

4.
$$\mathfrak{Im}(A) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})$$
Comme sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
$$\sin(\frac{\pi}{7}) \leq \sin(\frac{2\pi}{7})$$
Donc
$$\mathfrak{Im}(A) \geq \sin(\frac{4\pi}{7}) > 0$$

5. On a
$$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1 - \omega^7}{1 - \omega} = 0$$
Or
$$A + B = \sum_{k=1}^{6} \omega^k = \sum_{k=0}^{6} \omega^k - 1 = -1$$

6. $AB = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$ D'où
$$AB = 2\omega^7 + \omega^4(1 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = 2\omega^7 = 2$$

7. A et B sont donc les racines du polynome du second degré X^2+X+2. Son discriminant vaut $\Delta = 1-8 = -7$ donc
$$A \in \{\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}\}$$
D'après la question 4, $\mathfrak{Im}(A) > 0$ donc
$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

□

Exercice 5. *Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.*

1. *Calculer*
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z}+z\right|, z\in\mathbb{U}\right\}$$

2. *Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ on note $\alpha(z)=\frac{1}{z}+z$.*
   (a) *Calculer le module de $\alpha(z)$ en fonction de celui de z.*
   (b) *Montrer que pour tout $x>0$ on a : $\dfrac{1}{x}+x\geq 2$.*
   (c) *En déduire*
$$\inf\{|\alpha(z)|, z\in\mathbb{C}^*\}$$

Correction.

1. Comme $z\in\mathbb{U}$, il existe $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $z=e^{i\theta}$. Donc
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z}+z\right| &= \left|e^{-i\theta}+e^{i\theta}\right|\\ &= \left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$
Pour $\theta=\pi$ on a $\left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right|=0$ donc
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z}+z\right|, z\in\mathbb{U}\right\}=0$$

2. (a)
$$\begin{aligned}|\alpha(z)| &= \left|\frac{1}{\overline{z}}+z\right|\\ &= \left|\frac{1+z\overline{z}}{\overline{z}}\right|\\ &= \left|\frac{1+|z|^2}{\overline{z}}\right|\\ &= \frac{|1+|z|^2|}{|\overline{z}|}\\ &= \frac{1+|z|^2}{|z|}\\ &= \frac{1}{|z|}+|z|\end{aligned}$$
   (b) Pour tout $x>0$ on a
$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}-2 &= \frac{x^2-2x+1}{x}\\ &= \frac{(x-1)^2}{x}\geq 0\end{aligned}$$
   Donc pour tout $x>0$, $x+\frac{1}{x}-2\geq 0$.
   (c) On a $|\alpha(1)|=\frac{1}{|1|}+|1|=2$ et on a vu que pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $|\alpha(z)|\geq 2$ donc
$$\inf\{|\alpha(z)|, z\in\mathbb{C}^*\}=2$$

$\square$

Problème 1 (D'après Agro 2015). *1. Que vaut* $\arcsin(1/2)$ *et* $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$ *?*

2. *Tracer le graphe de la fonction* arcsin *dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. *Soit* $x \in [-1, 1]$, *calculer* $\sin(\arcsin(x))$ *?*
4. *Soit* $x \in [-1, 1]$, *montrer que* $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $f_n : x \mapsto \cos(2n \arcsin(x))$
5. *Calculer* f_0, f_1 *et* f_2.
6. (a) *Soient* a *et* b *deux réels, exprimer* $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ *uniquement en fonction de* $\cos(a)$ *et* $\cos(b)$.

   (b) *En déduire que pour tout entier* n *on a :*

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2) f_{n+1}(x).$$

Correction.

1. $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ et $\arcsin(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\pi}{4}$
2.
3. Pour $x \in [-1, 1]$ l'équation $\sin(\theta) = x$ admet une unique solution dans $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ notée $\theta = \arcsin(x)$. On a donc

$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$

4. On a $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x) = 1 - x^2$ Or cos est positif pour tout $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

5.

$$f_0(x) = \cos(0 \arcsin(x)) = 1$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(2 \arcsin(x) \\ &= \cos^2(\arcsin(x)) - \sin^2(\arcsin(x)) \\ &= 1 - x^2 - x^2 \\ &= 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \cos(4 \arcsin(x)) \\ &= \cos^2(2 \arcsin(x)) - \sin^2(2 \arcsin(x)) \\ &= (1-2x^2)^2 - (2 \sin(\arcsin(x) \cos(\arcsin(x))^2 \\ &= 1 - 4x^2 + 4x^4 - 4(x(\sqrt{1-x^2})^2 \\ &= 1 - 4x^2 + 4x^4 - 4(x^2(1-x^2)) \\ &= 1 - 8x^2 + 8x^4 \end{aligned}$$

6. (a) $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$

   (b)

$$f_{n+2}(x) + f_n(x) = \cos(2(n+2)\arcsin(x)) + \cos(2n \arcsin(x))$$

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) + f_n(x) &= \cos(2(n+2)\arcsin(x)) + \cos(2n \arcsin(x)) \\ &= 2\cos\left(\frac{2(n+2)+2n}{2} \arcsin(x)\right) \cos\left(\frac{2(n+2)-2n}{2} \arcsin(x)\right) \\ &= 2\cos(2(n+1)\arcsin(x) \cos(2\arcsin(x)) \\ &= 2 f_{n+1}(x) f_1(x) \\ &= 2(1-2x^2) f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

□

Problème 2 (421). *Le but de ce problème est de modéliser un jeu de dés, appelé « 421 ».*

Le joueur lance trois dés et plusieurs figure peuvent apparaitre :

- *Si les trois dés sont identiques c'est un « brelan ».*
- *Si seulement deux dés sont identiques c'est une « paire ».*
- *Si la valeur des trois dés se suivent, c'est une « suite ». De plus dans ce cas, si le plus grand dé vaut 6 c'est une « grande suite »alors que si le plus petit dé vaut 1 c'est une « petite suite ».*
- *Enfin si un dé vaut 1, un autre vaut 2 et le dernier vaut 4 c'est un « 421 ».*

1. *Ecrire un programme qui simule le lancer de trois dés. Le programme affichera la valeur de ces trois dés à l'utilisateur.*
2. *Ecrire un programme qui vérifie si la figure est un « brelan »ou une paire et affiche à l'utilisateur le nom de la figure. (Remarque, un brelan n'est pas une paire).*
3. *Pour les « suites »et le « 421 », le programme va devoir en premier lieu trier les trois dés dans l'ordre croissant. Proposez un programme qui échange l'ordre des dés et affiche à l'utilisateur les dés triés dans l'ordre croissant. (Remarque : il est plus simple de trier les dés deux à deux, quitte à le faire plusieurs fois de suite)*
4. *On dispose maintenant des trois dés, disons D1, D2,D3, triés dans l'ordre croissant. Proposer un programme qui affiche si les dés forment un « 421 ».*
5. *Proposer un programme qui affiche si les dés forment une « suite »une « grande suite »ou une « petite suite »(Remarque : Si le résultat est une grande suite, il n'y aura que grande suite qui sera affichée et non pas « suite »et « grande suite ». De même pour la petite suite)*

Correction.

1. ```
   from random import randint
   D1,D2,D3 =randint(1,6), randint(1,6), randint(1,6)
   print('les trois dés ont pour valeurs', D1,D2,D3)
   ```

2. ```
   if D1==D2 and D2==D3:
          print('Vous avez obenu un brelan')
   elif D1==D2 or D2==D3 or D1==D3:
          print(' Vous avez obenu une pair')
   ```

3. ```
   if D2<D1:
          D1,D2 =D2,D1
   if D3<D2:
          D3,D2=D2,D3
   if D2<D1:
          D1,D2=D2,D1
   print("les dés triés sont", D1,D2,D3)
   ```

   # On a trié les dés deux à deux, d'abord le premier avec le deuxième, puis le deuxième avec le troisième. Mais une fois cette action faite, le premier et le deuxième peuvent encore ne pas être triés. C'est pour ca que l'on rajoute la dernière étape.

4. `if D1==1 and D2==2 and D3==4:` # L'énoncé dit que les dés sont déjà triés, pas besoin de faire tous les cas.
   ```
          print("421")
   ```

5. ```
   if D1+1==D2 and D2+1==D3:
          if D1==1:
               print('petite suite')
          if D3==6:
               print('grande suite')
          else:
               print(' suite')
   ```

□