TD 7 : Suites

Suites usuelles

Exercice 1. *Calculer le terme général, étudier la convergence, et calculer la somme des termes* $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *pour les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $u_0 = 2$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

1. $u_{n+1} = u_n + 3$
2. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$
3. $u_{n+1} = u_n - 5$
4. $u_{n+1} = 3u_n$
5. $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
6. $u_{n+1} = -5u_n$
7. $u_{n+1} = 3u_n + 3$
8. $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + \frac{1}{3}$
9. $u_{n+1} = -u_n - 4$

Exercice 2. *Suites homographiques.*
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

1. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et que pour tout* $n \geq 3$*,* $u_n > 1$.
2. *En déduire que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie sur* $\mathbb{N}$.
3. *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique.*
4. *En déduire l'expression explicite de* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *puis de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. *Etudier la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. *Déterminer en fonction de* n*, le terme* u_n *des suites qui vérifient*

1. $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$.
2. $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 2,\ u_1 = -3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n$.
4. $u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ \forall n \geq 3,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
5. $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -4u_n$.

Exercice 4. *Pour ces suites définies par récurrence, calculer le terme général en fonction de* n *:*

1. $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{2n} u_n$
2. $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n^3$

Suites explicites

Exercice 5. *Étudier la monotonie des suites définies par*

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + 2(-1)^n$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

Exercice 6. *Limites de suites définies explicitement*
Étudier le comportement en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$
5. $u_n = \dfrac{2^n + n}{2^n}$
6. $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - \ln(n^3)}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
8. $u_n = \dfrac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$
9. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
10. $u_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$
11. $u_n = n^2 - n\cos n + 2$
12. $u_n = \dfrac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$
13. $u_n = \ln(2^n + n)$
14. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
15. $u_n = (\ln n)^n$
16. $u_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{3^n}$
17. $u_n = (n^2 + n + 1)^{\frac{1}{n}}$
18. $u_n = \dfrac{1}{a^n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b^k$
19. $u_n = n^2 \left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1\right)$

Suites définies par des sommes ou des produits

Exercice 7. *Étude d'une suite définie par une somme.*

1. *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :* $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.
2. *En déduire les limites quand n tend vers $+\infty$ des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *et* $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8. *Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :* $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Exercice 9. *En vous aidant du théorème des gendarmes, étudier la convergence des suites suivantes :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n + k}$.

Exercice 10. *Étude d'un produit.*

1. *Montrer que, pour tout $x > 0$, on a* $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) < x$.
2. *En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite définie par* $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 11. *Étude d'une suite définie par une somme.*

1. *Montrer que :* $\forall k \geq 2,\ \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. *On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ de terme général* $v_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$.

   Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3. *En déduire que la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge (on pourra montrer qu'elle est croissante et majorée).*

Exercice 12. *Pour tout $n \geq 1$, on pose :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad \textit{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

Démontrer que les suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et conclure.

Suites récurrentes

Exercice 13. *Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n \end{cases}$$

1. *Calculer $1 - u_{n+1}$ en fonction de $1 - u_n$.*
2. *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, en fonction du premier terme u_0.*

Exercice 14. *Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1)$. Que peut-on dire si on choisit maintenant $u_0 \in [-1, 0]$?*

Exercice 15. *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.*

1. *Étudier la fonction f associée.*
2. *Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.*
3. *Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *On suppose que $u_0 > 2$.*
   (a) *Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$.*
   (b) *Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (c) *Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
5. *On suppose que $u_0 \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.*
   (a) *Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.*
   (b) *Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (c) *Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 16. *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par* $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3 \end{cases}$

1. *Étudier la fonction f associée.*
2. *Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.*
3. *Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$ ou $u_0 = 0$?*

5. *On suppose que $u_0 \in]0,3[$.*
   (a) *Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0,3[$.*
   (b) *Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (c) *Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
6. *On suppose que $u_0 > 3$.*
   (a) *Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 3$.*
   (b) *Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (c) *Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
7. *On suppose que $u_0 < 0$.*
   (a) *Montrer que $u_1 > 3$.*
   (b) *En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 17. *Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{(1+u_n)^2}{4}$.*

Exercice 18. *Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.*

Exercice 19. *Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = e^{u_n}$.*

Suites récurrentes doubles

Exercice 20. *On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par*

$$u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = v_n - u_n$. Donner l'expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.*
2. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.*
3. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t_n = 3u_n + 8v_n$.*
   Donner l'expression de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 21. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. *Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer b_n en fonction de n.*

Suites implicites

Exercice 22. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une unique solution. On notera x_n cette solution.*
2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, on a $x_n \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right]$.*
3. *Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
4. *Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*