TD 5 - Logique et Ensemble

Raisonnements : implication, équivalence

Exercice 1. *Compléter les pointillés par le connecteur logique $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$ en justifiant votre choix.*

1. $x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2.$
2. $z \in \mathbb{C},\ z = -\overline{z} \ldots\ldots z \in i\mathbb{R}.$
3. $x \in \mathbb{R},\ x = \dfrac{\pi}{2} \ldots\ldots e^{4ix} = 1.$

Exercice 2. *On considère les deux propositions suivantes : A : « m et n sont deux entiers pairs », et B : « $m+n$ est un entier pair ». A-t-on $A \Rightarrow B$? $B \Rightarrow A$? $A \Leftrightarrow B$?*

Exercice 3. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante : $(x^2 + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0$ et $y = 0)$.*

Exercice 4. *Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.*

Exercice 5. *Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la propriété suivante est vraie : $P :\ (\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.*

Logique et quantificateurs

Exercice 6. *Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0.$
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ y \geq 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2.$
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2.$
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2.$
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

Exercice 7. *Soit (f, g) deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.*

1. *L'application f est croissante.*
2. *Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geq 0$.*
3. *La fonction f est paire.*
4. *La fonction f ne s'annule jamais.*
5. *La fonction f est inférieure à la fonction g.*
6. *La fonction f est périodique.*

Exercice 8. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :*

1. $1 \leq x < y.$
2. $(x^2 = 1) \Longrightarrow x = 1.$
3. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$

Ensembles

Exercice 9. 1. *Donner deux écritures de l'ensemble des complexes de partie réelle positive.*

2. *Montrer que* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+y=1\} = \{(x, 1-2x),\ x \in \mathbb{R}\}$. *Représenter graphiquement cet ensemble.*

Exercice 10. *Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A et B de E, on définit la différence symétrique de A et B par*

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Montrer que : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Exercice 11. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que*

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B.$$

Exercice 12. *Soit E un ensemble. Montrer par contraposition l'assertion suivante :*

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$$

Exercice 13. *Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :*

$$(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

Exercice 14. *On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 2\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (3x+y+2)(x+2y+4) \geq 0\}.$$

Représenter graphiquement A et B et montrer que $A \subset B$. A-t-on égalité ?

Exercice 15. 1. *Soit $E = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.*

2. *Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$ avec a, b, c, d deux à deux distincts.*
3. *Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.*