

# TD 4 - Trigonométrie

## I Résolution d'équations trigonométriques

**Exercice 1.** Calculer les réels suivants :  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

**Exercice 2.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1.  $\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2.  $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$

3.  $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$

4.  $\tan(2x) = -\sqrt{3}$

**Exercice 3.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $[0, 2\pi[$  et enfin dans  $] -\pi, \pi]$  les équations suivantes :

1.  $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2.  $-\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

3.  $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 0$

4.  $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$

**Exercice 4.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1.  $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$

2.  $\sqrt{2}\sin^2 x + (\sqrt{2} - 1)\cos x + 1 - \sqrt{2} = 0$

3.  $2\sin^4(x) - \sin^3(x) - 2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$

**Exercice 5.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $[0, 2\pi[$  les équations suivantes :

1.  $\cos(3x - 2) = \cos(2x - 1)$

2.  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

3.  $\tan(x + 1) + \tan(3x + 1) = 0$

4.  $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

5.  $\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

6.  $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) + 1 = 0$

7.  $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)$

8.  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

9.  $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$

10.  $1 + \cos x + \sin(5x) + \sin(6x) = 0$

11.  $\tan^4(x) + 2\tan^2(x) - 3 = 0$

**Exercice 6.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

2.  $\sin \theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \sin(4\theta) = 0$

3.  $\cos \theta - \cos(2\theta) = \sin(3\theta)$

4.  $\cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \frac{3}{4}$  (*exprimer  $\sin(3x)$  et  $\cos(3x)$  en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$* )

**Exercice 7.** 1. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . On pose :  $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ . Établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de  $x$  elles sont valides :

(a)  $\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$

(b)  $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$

(c)  $\tan x = \frac{2u}{1 - u^2}$

2. En utilisant ces relations, résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$ .

## II Résolution d'inéquations trigonométriques

**Exercice 8.** Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $[0, 2\pi[$  et  $] - \pi, \pi]$  :

1.  $2 \sin x - 1 < 0$

2.  $2 \cos(2x) > \sqrt{3}$

3.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \tan(3x) > 1$

4.  $\sin(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.  $\sqrt{2} \cos(3x) \leq 1$

6.  $\tan(x) \leq 1$

**Exercice 9.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

1.  $4 \sin^2 x - (2 + 2\sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} \leq 0$

2.  $\tan^2 x - 1 < 0$

3.  $2 \cos^2(3x) - 3 \cos(3x) + 1 \leq 0$

4.  $\tan^2 x - (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} < 0$

5.  $\frac{1}{4} \leq \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$

6.  $\cos(x) - \sin(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$

7.  $\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(x) \leq -1$

8.  $\cos x + \sin x - 1 < 0$

9.  $\sqrt{3} \cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0$

**Exercice 10.** Résoudre les inéquations suivantes dans  $[0, 2\pi[$  et dans  $] - \pi, \pi]$  :

1.  $\cos(2x) - \cos(4x) < 0$

2.  $2 \sin x \tan x - 3 < 0$

3.  $\cos(3x) \leq -\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

4.  $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$

5.  $2 \cos x - \sin x > \sin(3x)$

6.  $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1) \sin x + \sqrt{3} - 4 > 0$