TD 1 : Récurrence

Exercice 1. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Exercice 2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Exercice 3. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$n! \geq n^2.$$

Exercice 4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout réel positif $a \geq 0$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Exercice 6. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le nombre

$$n(2n + 1)(7n + 1)$$

est divisible par 6.

Exercice 7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

est un entier naturel.

Exercice 8. Montrer pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n + 1)! - 1.$$

Exercice 9. Pour tout entier $n \geq 2$ on pose :

$$P(n) \,:\, \forall (a_1, ..., a_n) \in [1, +\infty[^n \,,\, 2^{n-1}(a_1 ... a_n + 1) \geq (1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n).$$

Montrer que $P(2)$ est vraie, puis montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Exercice 10. On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence (H) définie de la manière suivante :

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (H).$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant (H) et $u_0 = 1, u_1 = 1$. Calculer les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(n \in [\![0, 5]\!])$
2. Montrer qu'il existe deux réels r_1, r_2 tel que les suites r_1^n et r_2^n vérifient la relation (H).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant (H) et $u_0 = 1, u_1 = 1$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_n = ar_1^n + br_2^n.$$