TD 2 : Nombres Réels

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-\lfloor x \rfloor}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est périodique de période 1.
3. Donner une expression simplifier de f sur les intervalles de la forme $]k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x est rationnel si et seulement si $f(x)$ est rationnel.

Exercice 2. Montrer que la fonction partie entière est croissante, ie montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor .$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$

Exercice 4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor .$$

Exercice 5. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \lfloor kx \rfloor$$

Borne inférieure, supérieure, maximum, minimum

Exercice 6. Chercher la borne inférieure, supérieure et dire si ce sont des maximum, minimum pour les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{x - \lfloor x \rfloor \mid x \in \mathbb{R}\}$
2. $E_2 = \{-x^2 + 3x - 1 \mid x \in [-1, 1]\}$
3. $E_3 = \{\exp(-x^2) | \, x \in \mathbb{R}\}$
4. $E_4 = \{\frac{1}{n!+1} | \, n \in \mathbb{N}^*\}$

Résolution d'équations et d'inéquations :

Exercice 7. Résoudre les (in)-équations suivantes :

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0$
2. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$
3. $(3x-1)(x+2) + (2-6x)(4x+3) > 0$
4. $32x^6 - 162x^2 < 0$
5. $\dfrac{2x}{4x^2-1} \leq \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}$
6. $\dfrac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} < 1$
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$
8. $(x-1)^2 \leq 1$
9. $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2x}$
10. $\dfrac{2x+1}{1+x} \geq \dfrac{3x-2}{1+x}$
11. $\dfrac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \dfrac{16x+2}{x+1}$

Exercice 8. Résoudre les (in)-équations suivantes :

1. $\sqrt{x+1} = x-1$
2. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leq 1$
3. $\sqrt{x^2-3} > 5x-9$
4. $\sqrt{x+1} = x-1$
5. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leq 1$
6. $\sqrt{x^2-3} > 5x-9$

Exercice 9. Résolution d'équations et d'inéquations avec les fonctions $\ln$, $\exp$ et $x \mapsto a^x$:

1. $\ln(x^2-4e^2) < 1+\ln(3x)$
2. $|\ln x| < 1$
3. $\ln(2x+4) - \ln(6-x) = \ln(3x-2) - \ln(x)$
4. $2^{2x+1} + 2^x = 1$
5. $2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$
6. $2\ln(x) + \ln(2x-1) > \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$
7. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$
8. $9^x - 2\times 3^x - 8 > 0$

Exercice 10. Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues :

1. $|2+x| + 2 + 2x = x^2$
2. $x^2 = |x|$
3. $|2x-3| \leq 2$
4. $|2x+3| - |-5x+6| \geq 3x+2$
5. $|x^2-1| \leq 2|x|$
6. $||x|-5| \geq ||3x|-3|$
7. $\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2|$
8. $\dfrac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1$

Exercice 11. À l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 1.$

Exercice 12. On considère l'expression $R(a) = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

1. Pour quels valeurs de a, $R(a)$ est-elle bien définie ?
2. Pour ces valeurs, simplifier l'expression $R(a)$. Tracer la fonction $a \mapsto R(a)$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $m(x+2) = 2m(3x-4)$
2. $(m+1)x + 2 - m = 0$
3. $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$
4. $\dfrac{m+3}{x} = \dfrac{2m-1}{x-1}$
5. $x - m = \sqrt{x^2+mx}.$

Exercice 14. Trouver toutes les valeurs du paramètre m telles que l'équation suivante ait deux racines réelles distinctes : $mx^2 + (m-2)x + 2m - 2 = 0$.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$
2. $\dfrac{m}{x-1} \leq \dfrac{1}{x+2}$
3. $\sqrt{2x+m} \geq x+1$