# TD 3 : Nombres Complexes

**Exercice 1.** *Mettre les complexes suivants sous forme algébrique simple :*

1. $z = \dfrac{1-3i}{1+3i}$
2. $z = (i - \sqrt{2})^3$
3. $z = \dfrac{1+4i}{1-5i}$
4. $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$
5. $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$
6. $z = \dfrac{1}{\frac{1}{i+1} - 1}$
7. $z = (1+i)^{2019}$
8. $z = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$
9. $z = (5-2i)^3$
10. $z = \dfrac{1}{(4-i)(3+2i)}$
11. $z = \dfrac{(3+i)(2-3i)}{-2i+5}$
12. $z = (\sqrt{3} - 2i)^4$

**Exercice 2.** *Soit $x$ un réel fixé. Calculer la partie réelle et imaginaire de $(x+i)^2$ et de $\dfrac{x-3i}{x^2+1-2ix}$.*

**Forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe**

**Exercice 3.** *Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle et trigonométrique :*

1. $z = -18$
2. $z = -7i$
3. $z = 1+i$
4. $z = (1+i)^5$
5. $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
6. $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
7. $z = -10e^{i\pi}\left(\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$
8. $z = -5\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)$
9. $z = \dfrac{1}{\frac{i}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}$
10. $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
11. $z = \dfrac{1}{1+i\tan\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
12. $z = \left(\dfrac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

**Exercice 4.** *Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'expression du module de $z_1$ et $z_2$. Mettre $z_2$ sous forme exponentielle.*

$$z_1 = t^2 + 2i\,t - 1 \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - \cos t + i\sin t.$$

**Exercice 5.** *Soit $u \in \mathbb{C}$ un complexe de module 1 et d'argument $\varphi$. Préciser le module et un argument de $1+u$.*

**Exercice 6.**

1. *Soient $a$ et $b$ des réels tels que $b$ ne soit pas de la forme : $(2k+1)\pi$ avec $k$ entier. Calculer le module et un argument de $\dfrac{1+\cos a + i\sin a}{1+\cos b + i\sin b}$.*
2. *Soit $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi[^2$. Déterminer la forme exponentielle de $Z = \dfrac{1-\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\sin\beta + i\cos\beta}$.*

**Exercice 7.** ♡ *On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.*

1. *Calculer $j^3$ et $1+j+j^2$.*
2. *Simplifier les expressions $(1+j)^5$, $\dfrac{1}{(1+j)^4}$ et $\dfrac{1}{1-j^2}$.*

**Applications des nombres complexes**

**Exercice 8.** *Linéariser les expressions suivantes, et en déduire une primitive dans chacun des cas.*

1. $\sin^5 x$,
2. $\sin^3 x \cos^2 x$,
3. $\cos^6 x$, $\sin^6 x$,
4. $\sin^4 x \cos^3 x$,
5. $\sin^4 x \cos^4 x$.

**Exercice 9.**
1. *Exprimer en fonction des puissances de* $\cos x$ *et de* $\sin x$ : $\cos(3x)$ *et* $\sin(4x)$.
2. *Exprimer en fonction des puissances de* $\cos x$ *et de* $\sin x$ : $\cos(5x)$ *et* $\sin(5x)$. *En déduire la valeur de* $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

**Exercice 10.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes.*
1. $(z+1)^2 + (2z+3)^2 = 0$
2. $2z^2(1-\cos(2\theta)) - 2z\sin(2\theta) + 1 = 0$
3. $\exp(z) = 3 + \sqrt{3}i$

**Exercice 11.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes et mettre les solutions sous forme exponentielle.*

1. $z^2 = i$
2. $z^3 = i$
3. $z^4 + 4 = 0$
4. $z^2 = 3 - 4i$
5. $z^4 = j$ *(on rappelle que* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ *).*

**Exercice 12.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes et mettre les solutions sous forme exponentielle.*
1. $z^n = (z-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$
2. $(z+1)^n = (z-1)^n$