Table des matières

Chapitre 1 : Fonctions réelles usuelles

I Rappels sur les nombres réels

Les nombres rationnels permettent d'additioner, soustraire, multiplier et diviser... Pourquoi chercher plus loin ? Le philosophe Hippase de métaponte ($\pm$ 500 av JC.) montre que l'hypothénuse d'un triangle rectangle isocèle dont les cotés valent 1, n'est pas un nombre rationnel.

Bien plus tard, Dedekind (1831-1916) et Cantor (1845-1918) proposent une construction des nombres réels de deux manières différentes. Nous ne rentrerons pas dans les détails, mais soulignons qu'un des points importants est l'existence de la borne supérieure (Voir section **??**). L'ensemble $\{x^2 \leq 2 \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$ n'admet pas de borne supérieure dans l'ensemble des rationnels.

Nous supposerons donc qu'il existe un ensemble, dit des nombre réel, et noté $\mathbb{R}$, qui vérifie les différentes propriétés de cette section.

I. 1 Intervalles

Sur $\mathbb{R}$ il existe un ordre qui permet de comparer deux nombres réels, c'est-à-dire de savoir lequel est supérieur ou égal à l'autre.

Définition 1. Ordre sur $\mathbb{R}$:

- $x < y \Longleftrightarrow$ si x est strictement inférieur à y.
- $x \leq y \Longleftrightarrow$ si x est inférieur à y ou bien égal.

Définition 2. Intervalle de $\mathbb{R}$: ce sont les ensembles de la forme

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$. Appelé parfois « segment a, b »ou « intervalle fermé a, b ».
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$. Appelé parfois « intervalle ouvert a, b ».
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$.
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$.
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$.
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$.
- $]-\infty, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}\}$.

où a et b sont deux réels quelconques.

Remarques :

- L'intervalle vide est noté $\emptyset$. Pour tout réel a, on a : $]a, a[= \emptyset$.

I. 2 Règles de calculs

On rappelle les règles de calculs élémentaires suivantes :

Proposition 3. Soit a, b, c, d 4 réels. On a

$$a(b+c) = (b+c)a = ab + ac$$

Si $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction *puissance* n est notée $\cdot^n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et définie par :

$$x^n = \prod_{k=1}^{n} x = x \times x \times ... \times x \qquad \text{n fois.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction puissance $-n$ pour tout $x \neq 0$ par :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Remarque

- Par convention $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cf section **??**.
- $0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. 0^{-n} n'est pas défini pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 5. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, non nuls si besoin, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ on a :

- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^n \times x^m = x^{n+m}$ et $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

Proposition 6. Inégalités remarquables. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Exercice 1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- Retrouver $(a-b)^3$.
- Montrer que $ab \leq \frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2$.

I. 3 Inégalités, majorant et borne sup

I. 3. a Rappel des règles de calculs sur les inégalités

Transitivité :

Proposition 7. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Ajouter (ou soustraire) des deux côtés un même terme conserve les inégalités.

Inégalités et addition :

Proposition 8.
- Addition d'un même terme : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \leq y \Longleftrightarrow x + z \leq y + z$.
- Addition des inégalités : $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4,\quad \left.\begin{array}{ccc} x & \leq & y \\ x' & \leq & y' \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ x + x' \leq y + y'$

Définition 9. On dit qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I si pour tout $x, y \in I$,

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \quad \text{resp. } f(x) \geq f(y)$$

Inégalités et multiplication :

Proposition 10.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \ \leq \ y \ \Leftrightarrow \forall \lambda > 0,\ \lambda x \leq \lambda y \Leftrightarrow \forall \lambda < 0,\ \lambda x \geq \lambda y$$

⚠ Quand on multiplie une inégalité on vérifie TOUJOURS le signe (et la non nullité) du coefficient multiplicateur. Si on ne le connait pas on ne peut pas assurer l'équivalence des inégalités et la preuve est fausse. Au pire, on peut essayer une disjonction de cas.

Exercice 11. A-t-on $x \leq y$ et $x' \leq y'$ implique $xx' \leq yy'$? Meme question si on suppose $x, y > 0$?

Inégalités et passage à l'inverse :

Proposition 12. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
- Si $x \geq y > 0$ alors $0 < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y}$
- Si $0 > x \geq y$ alors $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y} < 0$
- Si $x > 0$ et $y < 0$ alors $\dfrac{1}{y} < 0 < \dfrac{1}{x}$

Inégalités et passage à la limite : Pour rappel, on verra ca plus en détail dans un chapitre ultérieur.

Proposition 13. Soit f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) \leq g(x)$) alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

I. 3. b Majorant et minorant

Définition 14. Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit majoré si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$.
Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit minoré si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $x \geq m$.
Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit borné si il est majoré et minoré.

Soit E un ensemble majoré, un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$ $x \leq M$ s'appelle un majorant de E.

Soit E un ensemble borné, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$:

$$|x| \leq M.$$

Exercice 2. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il est majoré, minoré, borné. Et donner lorsque cela a un sens l'ensemble des majorants et des minorants :

- $A_1 = [1, 2[$
- $B_1 =]-\infty, -1]$
- $C_1 =]2, +\infty[$
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- $D = \{2, 4, 6, 9\}$
- $E = \{0, 1\} \cup [2, 3[$

Définition 15. Soit E un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. On appelle borne supérieure de E le plus petit des majorants. On le note $\sup_{x \in E}$.

Soit E un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$. On appelle borne inférieure de E le plus grand des minorants. On le note $\inf_{x \in E}$.

Théorème 16. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une unique borne supérieure.

Exemples :

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}$ est un ensemble majoré. Sa borne supérieure vaut $\sqrt{2}$.

Quantification de la borne supérieure La borne supérieure d'un ensemble majoré est l'unique réel M vérifiant

— $\forall x \in E,\, x \leq M$

— $\forall \epsilon > 0,\, \exists x \in E,\, M - \epsilon < x$

Exercice 3. Montrer l'unicité de la borne supérieure. (Difficile : manipuler les ϵ)

Définition 17. Soit E un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Si la borne supérieure $\sup_{x \in E}$ appartient à E on la note alors $\max_E$ et on l'appelle maximum.

Soit E un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$. Si la borne inférieure $\sup_{x \in E}$ appartient à E on la note alors $\min_E$ et on l'appelle minimum.

Exemples :

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 2\}$ est un ensemble minoré. Sa borne supérieure vaut $-\sqrt{2}$, c'est son minimum.

Remarque de culture générale : Tout ce que l'on vient de dire, à part le Théorème 16, s'applique aux nombres rationels et c'est grâce à la propriété de la borne supérieure que l'on contruit formellement les réels :

Définition 18. On appelle ensemble réels, noté $\mathbb{R}$, un ensemble qui contient $\mathbb{Q}$ et tel que :

— $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

— Tout ensemble majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

La définition de la densité signifie qu'entre deux nombres réels on peut toujours trouver un nombre rationel :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x < y, \exists q \in \mathbb{Q} \quad x < q < y.$$

I. 3. c Résolution des (in)-équations

Le maitre mot est la

$$\boxed{\textbf{FACTORISATION.}}$$

Soient f_1, f_2 deux fonctions, dont on connait le signe sur $\mathbb{R}$.

- Supposons $f_1 \geq 0$ sur un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, on a $f_1(x) \geq 0$) et $f_1 < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus I$.
- Supposons $f_2 \geq 0$ sur un sous-ensemble $J \subset \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, on a $f_2(x) \geq 0$) et $f_2 < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus J$.

Alors on connait le signe de $f_1 \times f_2$ sur $\mathbb{R}$:

— Pour tout $x \in I \cap J$, $f_1(x)f_2(x) \geq 0$.

— Pour tout $x \in I \cap (\mathbb{R} \setminus J) \cup J \cap (\mathbb{R} \setminus I)$, $f_1(x)f_2(x) < 0$.

— Pour tout $x \in (\mathbb{R} \setminus I) \cap (\mathbb{R} \setminus J)$, $f_1(x)f_2(x) > 0$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2x}{4x^2-1} \leq \frac{2x+1}{4x^2-4x+1}.$$

Transformer les équations et inéquations pour se ramener à des équations et inéquations de type polynomiale Lorsque l'équation ou l'inéquation n'est pas de type polynomiale (c'est-à-dire avec uniquement des puissances de x au numérateur et au dénominateur), on la transforme pour ne plus avoir ni logarithme, ni exponentielle, ni racine carrée, ni valeur absolue... On récapitule ici les différentes méthodes que l'on peut utiliser.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(\sqrt{x+1}) < \ln(3+x) - \frac{1}{2}\ln(2)$
2. $\ln(2x+1) - \ln(x-3) \leq 0$
3. $9^x - 5^{x+2} = 5^x - 3^{2x+1}$
4. $2^{x+3} < 4^{2-x}$
5. $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$
6. $(e - e^{2x})(e^x - 1) > 0$
7. $e^{\frac{x-1}{x+3}} > e^2$
8. $e^{x+1}e^{3x-4} > 1$

Élever au carré :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $a = b \implies a^2 = b^2$ est vrai ....
- $a = b \iff a^2 = b^2$ est vrai ....
- $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$ est vrai ....
- $a \leq b \iff a^2 \geq b^2$ est vrai ....

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x+7} = 5 - x$
2. $\sqrt{x^2+2x} < x + 1$
3. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \geq 5$
4. $\sqrt{2x^2 - x - 1} > x - \frac{1}{2}$
5. $\sqrt{\frac{6x-11}{3x-2}} \leq \frac{1}{x}$

Utiliser un changement de variable :

Poser un changement de variable de type $X = e^x$, $X = \ln(x)$, $X = a^x$, $X = \sqrt{x}$... pour faire apparaître des termes de type polynomiaux.

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^x + e^{x+1} > e^{2x} + e$
2. $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 \leq 0$
3. $x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4 > 0$
4. $e^{3x} - e^{2x} - e^{x+1} + e \leq 0$.
5. $\dfrac{e^x - 1}{e^x - e^2} < \dfrac{1}{e^2}$
6. $2^{4x} - 3 \times 2^{2x+1} + 2^3 < 0$
7. $\sqrt{9^x - 1} > 3^x - 2$

I. 4 Vocabulaire des fonctions réelles

I. 4. a Vocabulaire général

Définition 19. Soit f une fonction. On dit qu'elle est définie sur un ensemble D si pour tout x de D on peut associer une valeur à $f(x)$.

Définition 20. On dit qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I si pour tout $x, y \in I$,

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \quad \text{resp. } f(x) \geq f(y)$$

Définition 21. Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.

1. Image, antécédent :
   - Si $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x)$ est appelée l'image de x par f.
   - Soit $b \in \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{D}_f$ vérifiant $b = f(a)$, alors a est un antécédent de b par f.
2. Intervalle stable et point fixe :
   - Soit $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle. On dit que I est un intervalle stable par f si $f(I) \subset I$.
   - Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, x est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Exercice 22. On définit la fonction f par $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$. Donner son domaine de définition, l'image de $\ln 2$ par f, les antécédents de 0 par f. Donner l'ensemble des points fixes de f et montrer que $[\ln 2, +\infty[$ est un intervalle stable par f.

I. 4. b Parité

Définition 23. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f **est paire** si
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$

    et
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f **est impaire** si
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$

    et
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'originie.

Remarque. Lorsqu'une fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier et de la tracer sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ puis d'effectuer la symétrie indiquée ci-dessus pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples.
- Exemples de fonctions paires : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Exemples de fonctions impaires : $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exercice 24. Que dire de l'opposée, l'inverse d'une fonction paire (resp. impaire) ?
Que dire de la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) ?
Que dire de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Que dire de la composée de deux fonctions paires (resp impaires) ?
Que dire de la composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

I. 4. c Périodicité

Définition 25. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est périodique de période $T > 0$ si

- $\star$ $x \in D_f \Longleftrightarrow x + T \in D_f$

  et
- $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$

Graphiquement, la courbe représentative de f est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$

Remarque. Si f est périodique de période T, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(x+kT) = f(x)$
Il suffit de l'étudier et de la tracer sur un intervalle de longueur T puis d'effectuer la translation de vecteur $T\vec{i}$ pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples. Exemples de fonctions périodiques : $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor - x$.

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si f est une fonction périodique de période T et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est T périodique.
2. Si g est une fonction périodique de période T et $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, alors $h : x \mapsto g(ax + b)$ est périodique de période $\dfrac{T}{|a|}$.
   Application : donner la période des fonctions $x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ et $x \mapsto \tan(3x)$.

Définition 27. Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $A \subset \mathcal{D}_f$.

- On dit que f est majorée sur A si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ f(x) \leq M$
- On dit que f est minorée sur A si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ f(x) \geq m$
- On dit que f est bornée sur A si : f est majorée et minorée.

Remarque. Lorsque l'ensemble A n'est pas mentionné, c'est qu'il s'agit de $\mathcal{D}_f$ tout entier.

Exemples.
- $x \mapsto e^x$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. Elle est minorée sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto x^2$ est minorée mais pas majorée.
- $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est bornée.

Définition 28. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subset \mathcal{D}_f$, $A \neq \emptyset$. On pose $E = \{f(x),\ x \in A\}$.

- **Borne supérieure, maximum local, global :**
  - ⋆ Si la fonction f est majorée sur A, on définit : $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup E$.
  - ⋆ Si ce nombre est atteint, c'est-à-dire si : $\exists x_0 \in A,\ \forall x \in A,\ f(x) \leq f(x_0)$, on dit que $f(x_0)$ est le maximum de f sur A et on le note $\max\limits_{x\in A} f(x)$.
  - ⋆ Si $A = \mathcal{D}_f$, on parle alors de maximum global . Sinon, on parle de maximum local .
- **Borne inférieure, minimum local, global :**
  - ⋆ Si la fonction f est minorée sur A, on définit $\inf\limits_{x\in A} f(x) = \inf E$.
  - ⋆ Si ce nombre est atteint, c'est-à-dire si : $\exists x_0 \in A,\ \forall x \in A,\ f(x) \geq f(x_0)$, on dit que $f(x_0)$ est le minimum de f sur A et on le note $\min\limits_{x\in A} f(x)$.
  - ⋆ Si $A = \mathcal{D}_f$, on parle alors de minimum global . Sinon, on parle de minimum local .
- **Extremum local, global :**
  On dit qu'une fonction f, définie sur $\mathcal{D}_f$, admet un extremum global (resp local) lorsque f admet un maximum ou un minimum global (resp local).

Méthode pour trouver le maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure :
Étudier les variations de la fonction.

Exercice 29.
1. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - x$.
2. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction $f : x \mapsto |x(1-x)|$.

Exemple. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}\sin(2\pi x)$. Cette fonction n'admet pas d'extremum global, mais qu'elle admet cependant une infinité d'extrema locaux !

II Fonctions usuelles

On répertorie ici quelques propriétés de fonctions : valeur absolue, partie entiére et exposants.

II. 1 Valeur absolue

Définition 30. La fonction *valeur absolue* est notée $|\cdot| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

- En particulier, la fonction valeur absolue est toujours positive. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y sur la droite réelle.
- C'est une trivialité que $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Proposition 31. Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. Si $y \neq 0$ alors, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration.

1. Evident.
2. Disjonction de cas.
3. Poser $y' = \frac{1}{y}$ et appliquer 1.

$\square$

Proposition 32. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $\epsilon > 0$ un réel strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|x - a| \leq \epsilon \Longleftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon \Longleftrightarrow x \in [a - \epsilon, a + \epsilon].$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, l'inégalité $|x| \leq \epsilon$ est équivalente à $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ ou a $x \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Proposition 33 (Inégalité triangulaire ♥**).** Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration. Solution 1 : Disjonction de cas.
Solution 2 : On passe l'inégalité au carré. $\square$

Corollaire Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

Démonstration. On pose $x' = x$ et $y' = y - x$. On a alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$|y| = |x' + y'| \leq |x'| + |y'| = |x| + |y - x|.$$

D'où, $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. L'inégalité $-|y| + |x| \leq |x - y|$, se montre de la même façon en posant $x' = x - y$ et $y' = y$.

$\square$

Enlever les valeurs absolues :

- Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qui est à l'intérieur. $\Longrightarrow$ Étude de cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur de la valeur absolue.

Exercice 8. Résoudre $|x-1| = 2x+3$.

Exercice 9. Résoudre $x^2 = |x|$.

Exercice 10. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver et montrer une formule similaire pour $\max(x, y)$.

Exercice 11. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|-x-1|+4 = |2x+1|-5x+1$
2. $|3-x| > |x+2|$
3. $|x-1|+|x+2| < 3$
4. $|x^2-2x-5| > x-7$

II. 2 Partie entière

Définition 34. La fonction *partie entière* est notée $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$ et définie par :

$$\lfloor x\rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

Remarques :

- La fonction partie entière est parfois notée $E(\cdot)$. On évitera cette notation afin de ne pas la confondre avec l'espèrance d'une variable aléatoire, cf Chapitre Probabilité.
- La fonction partie entière et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle n'est pas continue aux poins entiers.

Exemples :

- $\lfloor 2\rfloor = 2$, $\lfloor -2\rfloor = -2$
- $\lfloor 2.2\rfloor = 2$, $\lfloor -2.2\rfloor = -3$
- $\lfloor \pi\rfloor = 3$, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$

Proposition 35. ❤ La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$n \leq x < n+1.$$

Remarque :

- J'ai choisi de définir la fonction partie entière avec la Définition 34 et de prouver la Proposition 35. On aurait pu faire l'inverse : définir la partie entière de x comme l'unique entier n vérifiant l'équation $n \leq x < n+1$ puis prouver qu'elle vérifie $\lfloor x\rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x - 1 < \lfloor x\rfloor \leq x.$$

Exercice 13. Calculer la limite de $\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$.

II. 3 Fonctions polynomiales

II. 3. a Constante

Définition 36. Soit a un réel et soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a$$

On dit alors que f est la fonction constante égale à a.

II. 3. b Affine

Définition 37. Soit a, b deux réels et $a \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b$$

On dit alors que f est une fonction affine. On appelle a le coefficient directeur (ou pente) de f et b son ordonnée à l'origine.

Proposition 38. Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine. On a alors

— Si $a > 0$, $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{-b}{a}$

— Si $a < 0$, $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{-b}{a}$

II. 3. c Fonctions du second degré

Définition 39. Soit a, b, c trois réels et $a \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On dit alors que f est une fonction polynomiale de degré 2.

Définition 40. On appelle discriminant d'une fonction polynomiale de degré 2, $f(x) == ax^2 + bx + c$, le nombre souvent noté Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Définition 41. On appelle racine de f un nombre r tel que $f(r) = 0$

Proposition 42. Soit f une fonction polynomiale de degré 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Soit Δ son discriminant. On a alors :

— Si $\Delta > 0$, f admet deux racines réelles

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, f admet une unique racine réelle

$$r = \frac{-b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, f n'admet aucune racine réelle (mais des racines complexes...)

Exercice 43. Ecrire un script Python qui permet de résoudre les équations polynomiales de degré 2.

II. 3. d Fonctions polynomiales de degré n

Définition 44. Soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, $n+1$ réels avec $a_n \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

On dit alors que f est une fonction polynomiale de degré n.

Définition 45. On appelle racine de f un nombre r tel que $f(r) = 0$

II. 4 Fonction trigonométrique

II. 4. a Définitions

Définition 46. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité, à savoir le cercle de centre O et de rayon 1. On dit que $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique.

Soit θ un réel et M le point de $\mathcal{C}$ tel que θ corresponde à la longueur orientée le long du cercle entre O et M. On dit alors que θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 47. On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle θ par :

- $\cos(\theta)$ est l'abscisse de M
- $\sin(\theta)$ est l'ordonnée de M
- $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

Remarques :

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & \cos(\theta) & \leq & 1 \\ -1 & \leq & \sin(\theta) & \leq & 1 \end{array}$$
- La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						

Exercice 14. Donner la valeur des nombres suivants :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						

II. 4. b Formulaire trigonométrique

Relations entre le cosinus, le sinus et la tangente

Théorème 48. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$$

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \cos(x+\frac{\pi}{2}) &= -\sin(x) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) &= \sin(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin(-x) &= \sin(x) \\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \sin(x+\frac{\pi}{2}) &= \cos(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) &= \cos(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tan(-x) &= -\tan(x) \\ \tan(x+\pi) &= \tan(x) \\ \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\ \tan(x+\frac{\pi}{2}) &= -\frac{1}{\tan(x)} \\ \tan(\frac{\pi}{2} - x) &= \frac{1}{\tan(x)} \end{aligned}$$

A retrouver géométriquement.

Addition des angles

Proposition 49. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ on a :

- $\cos(a+b) =$

  $\cos(a-b) =$
- $\sin(a+b) =$

  $\sin(a-b) =$
- $\tan(a+b) =$

On retrouvera ces formules grâce aux nombres complexes.

Duplication des angles

Proposition 50. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 && \iff && \cos^2(a) = \tfrac{\cos(2a)+1}{2} \\ &= 1 - 2\sin^2(a) && \iff && \sin^2(a) = \tfrac{1-\cos(2a)}{2} \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \end{aligned}$$

Démonstration. □

Exercice 15. Calculer $\cos(\pi/12)$

Transformation de produits en sommes

Proposition 51. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl}\cos a \cos b &=& \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b)) \\ \sin a \sin b &=& \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)) \\ \sin a \cos b &=& \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b)) \\ \cos a \sin b &=& \frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))\end{array}$$

Démonstration. □

Exercice 16. Calculer $cos(5\pi/12)$ ($a = \pi/12$, $b = \pi/3$)

Transformation de sommes en produits

Proposition 52. Pour tout $p, q \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl}\cos p + \cos q &=& 2\cos(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2}) \\ \cos p - \cos q &=& -2\sin(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2}) \\ \sin p + \sin q &=& 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \\ \sin p - \sin q &=& 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})\end{array}$$

Démonstration. □

Exercice 17. Résoudre $\cos(2x) + \cos(4x) = 0$

II. 5 Fonctions ln *et* exp

Théorème 53. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x > 0\, f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

Définition 54. On appelle logarithme népérien et on note ln la fonction f du théorème précédent.

Théorème 55. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x > 0\, f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Définition 56. On appelle exponentielle et on note exp la fonction f du théorème précédent.

Proposition 57. On a pour tout $x > 0$:

$$\exp(\ln(x)) = x$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(\exp(x)) = x$$

Propriétés du $\ln$, $\exp$**, puissances :**

Propriétés du logarithme ($a > 0,\ b > 0$) :	Propriétés de l'exponentielle :
• $\ln(ab) =$	• $e^a e^b =$
• $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$	• $\frac{e^a}{e^b} =$
• $\ln(a^p) =$	• $(e^a)^b =$
• La fonction logarithme est	• La fonction exponentielle est ....

Les inégalités suivantes sont ultra-classiques et doivent savoir être prouvées :

Proposition 58. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geq x + 1$$

Pour tout $x > -1$:

$$\ln(x+1) \leq x$$

II. 6 Exposants, racine carrée

Définition 59. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^2 = x$. Ce nombre est appelé racine carrée de x, et est noté $\sqrt{x}$.

Remarques :

- Par définition, pour tout $x \geq 0$ $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x}^2 = x$.

Exemples :

- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \geq 0}}}$,

$$(\sqrt{x})^2 = x.$$

- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \geq 0}}}$,

$$\sqrt{x^2} = x.$$

- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}}$,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Exercice 18. Résoudre

$$\sqrt{3x-1} = x$$

$$\sqrt{1-3x} = x$$

$$\sqrt{1-3x} = -x$$

Définition 60. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^n = x$. Ce nombre est appelé racine n-éme de x, et est noté $\sqrt[n]{x}$.

Remarques :

- Pour n impair, la racine n-ème est bien définie pour $x < 0$.

Définition 61. Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationel. On défini x^r par $(\sqrt[q]{x})^q$

Enfin on peut définir une puissance pour un exposant réel par la formule suivante :

Proposition 62. Pour tout $x > 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ on a

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)).$$

Les règles de calcul associées aux puissances entières s'étendent aux exposants réels :

Proposition 63. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Démonstration. □

Remarque :

Il est parfois plus simple de passer à la notation exponentielle pour faire les calculs. L'exemple le plus flagrant étant le calcul de

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Exercice 19. Calculer $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 20. ♥ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

III Etude de fonctions

III. 1 Représentations graphiques et domaine d'étude

Définition 64. Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On appelle courbe représentatitve de f (ou graphe), la courbe du plan notée $\mathcal{C}_f$ et définie par :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in D\}.$$

Proposition 65. Soient deux fonctions f et g, et soit I un intervalle de $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.

- Si $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$, les deux fonctions sont égales sur I, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont confondues sur I.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \geq g(x)$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

Définition 66. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f **est paire** si
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$
    et
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f **est impaire** si
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$
    et
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'origine.

Remarque. Lorsqu'une fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier et de la tracer sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ puis d'effectuer la symétrie indiquée ci-dessus pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples.
- Exemples de fonctions paires : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Exemples de fonctions impaires : $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exercice 67. Que dire de l'opposée, l'inverse d'une fonction paire (resp. impaire) ?
Que dire de la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) ?
Que dire de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Que dire de la composée de deux fonctions paires (resp impaires) ?
Que dire de la composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Définition 68. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est périodique de période $T > 0$ si

- $\star$ $x \in D_f \Longleftrightarrow x + T \in D_f$
  et
- $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$

Graphiquement, la courbe représentative de f est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$

Remarque. Si f est périodique de période T, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(x+kT) = f(x)$
Il suffit de l'étudier et de la tracer sur un intervalle de longueur T puis d'effectuer la translation de vecteur $T\vec{i}$ pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples. Exemples de fonctions périodiques : $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor - x$.

Exercice 69. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si f est une fonction périodique de période T et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est T périodique.
2. Si g est une fonction périodique de période T et $(a,b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, alors $h : x \mapsto g(ax+b)$ est périodique de période $\dfrac{T}{|a|}$.
   Application : donner la période des fonctions $x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ et $x \mapsto \tan(3x)$.

III. 2 Rappel sur la dérivation

Définition 70. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas on note $f'(x_0)$ cette limite.

⚠ Avant tout calcul de dérivée, vous devez justifier que la fonction est bien dérivable. On ne reviendra heureusement que rarement (si ce n'est quasiment jamais) à cette définition.

On vériife une fois pour toute que les fonctions usuelles : $\cos, \sin, \tan, \exp, \ln, x^\alpha$ sont dérivables et ensuites les fonctions que l'on est amenée à étudier seront des sommes, produits, quotients et fractions et composition de ces fonctions usuelles.

III. 2. a Opérations sur les dérivées : Calcul de dérivée

Proposition 71. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.

- ⋆ Le produit uv est dérivable sur I et
$$(uv)' = u'v + uv'$$
- ⋆ Si v ne s'annule pas sur I, alors le quotient de u par v est dérivable sur I et
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$
- ⋆ En particulier si v ne s'annule pas sur I, alors l'inverse de v est dérivable sur I et
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$
- ⋆ Si f est une fonction dérivable sur un intervalle J avec $\forall x \in I, g(x) \in J$, alors la composée de f par g est dérivable sur I et :
$$\forall x \in I, (f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$
c'est-à-dire : $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$

Exemples. Dérivées des composées de référence : soit u une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}^\star$.

- La fonction u^n est dérivable sur I et
$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$
- Si $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et
$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'u^{n-1}}{u^{2n}} = \frac{nu'}{u^{n+1}}$$
- Si $\forall x \in I, u(x) > 0$ alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
- Si $\forall x \in I, u(x) > 0$ alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

- La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

- La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et

$$(\cos(u))' = -u' \sin(u)$$

- La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et

$$(\sin(u))' = u' \cos(u)$$

- Si $\forall x \in I, u(x) \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ alors la fonction $\tan u$ est dérivable sur I et

$$(\tan u)' = u' \frac{1}{\cos^2(u)}$$

Exercice 72. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivées :

1. $f(x) = \cos^4(5x)\sin^3(2x)$
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)$
3. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{e^{x^2}}$
4. $f(x) = \dfrac{\sin^4(2x)}{\sqrt{x^2-1}}$

III. 2. b Lien avec le sens de variation d'une fonction

Dans la plupart des situations, étudier la monotonie d'une fonction se ramène à étudier le signe de sa dérivée.

Proposition 73. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Dans le cadre de la monotonie stricte, seule une implication reste valable :

Proposition 74.

- Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ (sauf en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante sur I.
- Si $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$ (sauf en un nombre fini de points), alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque. Attention, f strictement croissante n'implique pas que la dérivée est partout strictement positive ! Contre-exemple : la fonction $f : x \mapsto x^3$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

Exercice 75. Étudier les variations des fonctions suivantes : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ et $g(x) = x + 3 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

III. 2. c Équation d'une tangente

Proposition 76. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 existe bien et son équation est donnée par
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

⚠ Avant de donner l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0, il ne faut pas oublier de justifier son existence à savoir que la fonction est bien dérivable en x_0.

Exercice 77. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1$.

III. 3 Croissance comparée et limites usuelles

III. 3. a Calculs de limites

Vous devez, pour l'instant :

- Connaître les limites des fonctions usuelles et savoir calculer les limites en utilisant les propriétés sur la somme, le produit, le quotient et la composée de limites. **Tout calcul de limite doit être justifié !**

- Connaître les formes indéterminées.
- Savoir dans des cas simples transformer l'expression pour lever l'indétermination.

III. 3. b Théorèmes sur les limites

Théorème 78. Théorème du monôme de plus haut degré.

- En $\pm\infty$, une fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, une fonction rationnelle a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Théorème 79. Théorème des croissances comparées. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a(\ln x)^b = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^a e^{bx} = 0$

Remarque. On retiendra que « les puissances l'emportent sur le logarithme, et l'exponentielle l'emporte sur les puissances », mais on ne l'écrira jamais !

Théorème 80. Limites en 0 à connaître :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Exercice 81. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^{2x}+1}$
3. $f(x) = \ln(x) - x + 1$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)$
5. $f(x) = x\ln(x) - x + m^2x$ avec m paramètre réel.
6. $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

III. 3. c Rappels sur les asymptotes :

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Asymptotes verticales en un point :

Définition 82. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un intervalle du type $[a, x_0[$ ou $]x_0, a]$.
La droite $x = x_0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ si

Asymptotes en $\pm\infty$:

On suppose que f est une fonction définie sur un intervalle du type $[c, +\infty[$ ou $]-\infty, c]$.
Asymptotes horizontales :

Définition 83. Soit b un nombre réel.
La droite $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si :

Asymptotes obliques :

Définition 84. Soient $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b \in \mathbb{R}$.
La droite $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si :

Exercice 85. Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$
2. $f(x) = x + 3 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{3}x + 2$