Correction TD 1 - Fonctions usuelles réelles

I Rappels sur les nombres réels

I. 1 Borne inférieure, supérieure, maximum, minimum

Correction 1. Voir en ligne.

I. 2 Résolution d'équations et d'inéquations :

Correction 2. **Résolution d'équations et d'inéquations avec des polynômes.**

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^3+4x^2+x-6 \geq 0}$:**
   1 est racine évidente et on obtient : $x^3+4x^2+x-6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+5x+6) \geq 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = [-3,-2] \cup [1,+\infty[.}$
2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^3-x^2-x-2 < 0}$:**
   2 est racine évidente et on obtient :$x^3-x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+1) < 0$ et le discriminant de x^2+x+1 est négatif donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 2[.}$
3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(3x-1)(x+2)+(2-6x)(4x+3) > 0}$:**
   On factorise par $3x-1$ et on obtient :
   $$(3x-1)(x+2)+(2-6x)(4x+3) > 0 \Leftrightarrow (3x-1)\left[x+2-2(4x+3)\right] > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(-7x-4) > 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{4}{7}, \frac{1}{3}\right[.}$
4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{32x^6-162x^2 < 0}$:**
   On factorise par $2x^2$ puis on utilise l'identité remarquable a^2-b^2 et on obtient :
   $$32x^6-162x^2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2(16x^4-81) < 0 \Leftrightarrow 2x^2(4x^2-9)(4x^2+9) < 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[\setminus \{0\}.}$
5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{2x}{4x^2-1} \leq \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}}$:**
   On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $4x^2-1 \neq 0$ et $4x^2-4x+1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
   On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
   $$\frac{2x}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{2x+1}{(2x-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(2x-1)-(2x+1)(2x+1)}{(2x-1)^2(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-1}{(2x-1)^2(2x+1)} \leq 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.}$

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} < 1}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x^4-5x^2+4 \neq 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1) \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,1,2\}$.
On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
$$\frac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+x-4}{(x^2-4)(x^2-1)} < 0.$$
Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-2,-1[\cup \left]-1, \frac{4}{5}\right[\cup]1,2[.}$

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2x^2-4x+2 = 1-x}$:**
$2x^2-4x+2 = 1-x \Leftrightarrow 2x^2-3x+1 = 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(x-1)^2 \leq 1}$:**
$(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = [0,2]}$.

9. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2x}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x-2 \neq 0$ et $2x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$.
De plus, on a : $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{2x(x-2)} \leq 0$ et un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,-2] \cup]0,2[}$.

10. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{2x+1}{1+x} \geq \dfrac{3x-2}{1+x}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x+1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$\dfrac{2x+1}{x+1} \geq \dfrac{3x-2}{1+x} \Leftrightarrow \dfrac{-x+3}{1+x} \geq 0$ et un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-1,3]}$.

11. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \dfrac{16x+2}{x+1}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x-2 \neq 0$ et $x+1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1,2\}$.
$\dfrac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \dfrac{16x+2}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{x(x^2-5x+36)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$ donc un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,-1[\cup[0,2[}$.

II Fonctions usuelles

II. 1 Ensemble de définition

Correction 3.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$: la fonction f est bien définie si et seulement si $x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ car la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$. La fonction f est bien définie si et seulement si : $x \neq 0$ et $x - \dfrac{1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}}$.

3. $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$. La fonction f est bien définie si et seulement si $x-3 \geq 0$, $5+x \geq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_f = [3,+\infty[}$.

4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0$ et $e^x - 1 \neq 0$. Comme le numérateur est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs, on a : $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}}$.
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{2-x}{x+4} > 0$ et $x+4 \neq 0$ (faire un tableau de signe). Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-4, 2[}$.

Correction 4. La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Le discriminant donne : $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$.

- Cas 1 : si $m = 1$: On obtient alors $\Delta = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2-(m+1)x+m \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m=1} = \mathbb{R}}$.
- Cas 2 : si $m \neq 1$: On obtient alors $\Delta > 0$ et les deux racines distinctes sont alors : $\dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $\dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. Afin de calculer la valeur absolue, on doit encore distinguer deux cas :
  - ⋆ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m>1} =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[}$.
  - ⋆ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m<1} =]-\infty, m] \cup [1, +\infty[}$.

Correction 5.

1. - Étude de $f \circ g$:
     - ⋆ Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$ et $g(x) \in \mathcal{D}_f$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$, à savoir si et seulement si $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = [3, +\infty[}$.
     - ⋆ Expression : Pour tout $x \geq 3$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2(g(x))^2 - (g(x)) + 1 = 8(x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1 = 8x - 23 - 2\sqrt{x-3}$.
   - Étude de $g \circ f$:
     - ⋆ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $f(x) \in \mathcal{D}_g$, à savoir si et seulement si $f(x) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 \geq 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 17$ et les deux racines sont $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[}$.
     - ⋆ Expression : Pour tout $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sqrt{2x^2 - x - 2}$.
2. - Étude de $f \circ g$:
     - ⋆ Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$ et $g(x) \in \mathcal{D}_f$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathcal{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $g(x) \neq 0$. On a : $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq 0$: toujours vrai. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}^\star}$.
     - ⋆ Expression : Pour tout $x \neq 0$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = \dfrac{2(g(x))^2 - 8}{g(x)} = \dfrac{2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 8}{\frac{x^2+1}{x}} = \dfrac{2(x^2+1)^2 - 8x^2}{x^2} \times \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{2x^4 - 4x^2 + 2}{x(x^2+1)}$.

- Étude de $g \circ f$:
  - $\star$ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathcal{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. On a : $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}}$.
  - $\star$ Expression : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = f(x) + \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} + \dfrac{x}{2x^2 - 8} = \dfrac{4x^4 - 31x^2 + 64}{x(2x^2 - 8)}$.

Correction 6.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$: La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}} > 0$, $e^{\frac{x}{2}} \geq 0$, $2x - 1 > 0$ et $e^{2\ln(2x-1)} \geq 0$. Comme toute exponentielle est strictement positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f =]\frac{1}{2}, +\infty[}$.

   Pour tout $x > \dfrac{1}{2}$, on a :

   $$f(x) = x \ln \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(e^{2\ln(2x-1)}\right)^{\frac{3}{2}} = x \ln (e^{\frac{x}{4}}) + \left(e^{\ln((2x-1)^2)}\right)^{\frac{3}{2}} = x \times \frac{x}{4} + ((2x-1)^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{4} + (2x-1)^3$$

2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$. La fonction g est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_g = [1, +\infty[}$.

   On ne peux RIEN simplifier car $\sqrt{\ln x} = (\ln x)^{\frac{1}{2}} \neq \dfrac{1}{2} \ln(x)$... De même, on a : $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2)$... et on ne peux rien faire avec $(\ln x)^2$.

II. 2 Valeur absolue

Correction 7. Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|2 + x| + 2 + 2x = x^2$:**
   Il y a une valeur absolue, on doit donc étudier deux cas :
   - Cas 1 : si $2 + x \geq 0$, à savoir si $x \geq -2$. L'équation à résoudre est alors

     $$2 + x + 2 + 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

     Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 25$, ainsi, les solutions sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$. Elles sont bien toutes les deux supérieures à -2, donc $\mathcal{S}_1 = \{-1, 4\}$.
   - Cas 2, si $2 + x \leq 0$, à savoir si $x \leq -2$. L'équation à résoudre est alors

     $$-2 - x + 2 + 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

     Les solutions sont $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$. Aucune des deux solutions trouvées n'appartient à l'intervalle $]-\infty, -2]$, ainsi $\mathcal{S}_2 = \{\emptyset\}$.

   Synthèse : on obtient $\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 4\}}$.
2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $x^2 = |x|$:**
   Il y a une valeur absolue, on étudie donc deux cas :

- Cas 1 : si $x \geq 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0.$$

  L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_1 = \{0, 1\}$.
- Cas 2 : si $x \leq 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à

$$x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0.$$

  L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_2 = \{-1, 0\}$.

Synthèse : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|2x - 3| \leq 2$:**

   On fait deux cas selon que $2x - 3 \geq 0$ ou $2x - 3 < 0$ et on obtient $\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|2x + 3| - |-5x + 6| \geq 3x + 2$:**
   On commence par faire un tableau récapitulatif et on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$\|2x + 3\|$		$-2x - 3$	0	$2x + 3$		$2x + 3$	
$\|-5x + 6\|$		$-5x + 6$		$-5x + 6$	0	$5x - 6$	
$\|2x + 3\| - \|-5x + 6\|$		$3x - 9$		$7x - 3$		$-3x + 9$	

   On étudie alors les 3 cas et on obtient au final : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|x^2 - 1| \leq 2|x|$:**
   On commence par faire un tableau récapitulatif des cas :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\|x\|$		$-x$		$-x$	0	x		x	
$\|x^2 - 1\|$		$x^2 - 1$	0	$-x^2 + 1$		$-x^2 + 1$	0	$x^2 - 1$	

   Étude de cas :
   - Cas 1 : si $x \in]-\infty, -1]$:

$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \leq 0.$$

     Ainsi $\mathcal{S}_1 = [-1 - \sqrt{2}, -1]$.
   - Cas 2 : si $x \in]-1, 0[$:

$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow -x^2 + 1 \leq -2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 0.$$

     Ainsi $\mathcal{S}_2 =]-1, 1 - \sqrt{2}]$.
   - Cas 3 : si $x \in [0, 1]$:

$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow -x^2 + 1 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \geq 0.$$

     Ainsi $\mathcal{S}_3 = [-1 + \sqrt{2}, 1]$.

- Cas 4 : si $x \in]1,+\infty[$:
$$|x^2-1| \leq 2|x| \Leftrightarrow x^2-1 \leq 2x \Leftrightarrow x^2-2x-1 \leq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_4 =]1, 1+\sqrt{2}]$.

Synthèse : on obtient $\boxed{\mathcal{S} = [-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $||\mathbf{x}|-\mathbf{5}| \geq ||\mathbf{3x}|-\mathbf{3}|$:**
On commence toujours par se débarasser des valeurs absolues à l'intérieur :
   - Si $x \geq 0$: On a alors : (6) $\Leftrightarrow |x-5| \geq |3x-3|$. Ici soit on refait des cas sur les signes de $x-5$ et $3x-3$, soit on élève au carré car les valeurs absolues sont positives. On applique la deuxième méthode :
$$(6) \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq (3x-3)^2 \Leftrightarrow -8x^2+8x+16 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+x+2 \geq 0$$
On trouve alors $x \in [-1,2]$. Attention, il faut aussi dans ce premier cas que x soit positif : au final, $S_1 = [0,2]$.
   - Si $x < 0$: On a alors : (6) $\Leftrightarrow |-x-5| \geq |-3x-3|$. On élève au carré car les valeurs absolues sont positives :
$$(6) \Leftrightarrow (-x-5)^2 \geq (-3x-3)^2 \Leftrightarrow -8x^2-8x+16 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2-x+2 \geq 0$$
On trouve $x \in [-2,1]$, mais comme on doit avoir $x < 0$ dans ce deuxième cas, on a $S_2 = [-2,0[$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = S_1 \cup S_2 = [-2,2]}$.

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x^2-x-2}} \geq |\mathbf{3x+2}|$:**
   - Domaine de définition : L'inéqution est bien définie si $x^2-x-2 \geq 0$. Ainsi $\mathcal{D} =]-\infty,-1] \cup [2,+\infty[$.
   - Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$\lvert 3x+2\rvert$		$-3x-2$	0	$3x+2$	

   - Étude de cas :
     - ⋆ Cas 1 : si $x \in \left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right]$: on se place donc sur $]-\infty,-1]$:
On doit alors résoudre $\sqrt{x^2-x-2} \geq -3x-2$. Les deux termes sont bien positifs donc on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient :
$$\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2| \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 9x^2+12x+4 \Leftrightarrow 8x^2+13x+6 \leq 0.$$
Le discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$. Ainsi $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
     - ⋆ Cas 2 : si $x \in \left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$: on se place donc sur $[2,+\infty[$:
On doit alors résoudre $\sqrt{x^2-x-2} \geq 3x+2$. Les deux termes sont bien positifs donc on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient :
$$\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2| \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 9x^2+12x+4 \Leftrightarrow 8x^2+13x+6 \leq 0.$$
Le discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$. Ainsi $\mathcal{S}_2 = \emptyset$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\dfrac{\mathbf{x^2+\sqrt{2}x}}{\mathbf{|x^2-1|+1}} \geq \mathbf{1}$:**

- Domaine de définition : L'inéquation est bien définie si $|x^2-1|+1 \neq 0$. Ce qui est toujours le cas comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
- Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1	0	$-x^2+1$	0	x^2-1	

- Étude de cas :
  - ⋆ Cas 1 : si $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$:
  $$\frac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+\sqrt{2}x}{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$
  Ainsi $\mathcal{S}_1=[1,+\infty[$.
  - ⋆ Cas 2 : si $x \in]-1,1[$:
  $$\frac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+\sqrt{2}x}{-x^2+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+x\sqrt{2}-2}{2-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$
  Un tableau de signe avec le signe du numérateur (les racines du numérateur étant $-\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$) et celui du dénominateur donne : $\mathcal{S}_2=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right[$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[.}$

II. 3 Partie entière

Correction 8. Video

Correction 9.
Soit $x,y \in \mathbb{R}^2$ et $k=\lfloor x \rfloor$. On a donc $x \in [k,k+1[$. Il y a maintenant deux cas possibles

Cas 1 : $y \in [k,k+1[$ alors $\lfloor y \rfloor = k$ et donc $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

Cas 3 : $y \notin [k,k+1[$ Comme $y \geq x$, on a $y > k+1$ et comme $\lfloor y \rfloor > y-1$ on a $\lfloor y \rfloor > k = \lfloor x \rfloor$
On a ainsi montré que la fonction était croissante.

Correction 10. Distinguons les cas selon la parité de $\lfloor x \rfloor$.

Cas 1 : $\lfloor x \rfloor$ est paire Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor x \rfloor \in [2k,2k+1[$, où $\lfloor x \rfloor = 2k$. On a alors $\frac{x}{2} \in [k,k+\frac{1}{2}[$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = k$ et $\frac{x+1}{2} \in [k+\frac{1}{2},k+1[$, donc de nouveau $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k$
On a bien l'égalité demandée.

Cas 2 : $\lfloor x \rfloor$ est impaire Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor x \rfloor \in [2k+1,2k+2[$, où $\lfloor x \rfloor = 2k+1$. On a alors $\frac{x}{2} \in [k+\frac{1}{2},k+1[$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = k$ et $\frac{x+1}{2} \in [k+1,k+\frac{3}{2}$, donc cette fois $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k+1$
On a bien l'égalité demandée.

II. 4 Fonctions polynomiales

Correction 11.

1. Les calculs donnent $P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2$, $P - Q = 2X - 1$, $P^2 - Q^2 = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$.
2. On obtient $P(X + 1) = X^2 + 5X + 4$.
3. $S \circ f : t \mapsto -\sin^2(t)$.

II. 5 Exponentielle et logarithme

Correction 12. **Résolution d'équations et d'inéquations avec $\ln$, $\exp$ et $x \mapsto a^x$.**

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{x^2 - 4e^2}) < \mathbf{1} + \ln(\mathbf{3x})$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} =]2e, +\infty[$
   - ⋆ On a : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow x^2 - 3xe - 4e^2 < 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]2e, 4e[}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\ln \mathbf{x}| < \mathbf{1}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - ⋆ On distingue deux cas :
     - Si $x \geq 1$, alors $|\ln x| = \ln x$ et on doit résoudre $\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$, donc $\mathcal{S}_\infty = [1, e[$.
     - Si $0 < x < 1$, alors $|\ln x| = -\ln x$ et on doit résoudre $-\ln x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$, donc $\mathcal{S}_2 = \left]\frac{1}{e}, 1\right[$.

   Ainsi, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, soit : $\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{1}{e}, e\right[}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{2x + 4}) - \ln(\mathbf{6 - x}) = \ln(\mathbf{3x - 2}) - \ln(\mathbf{x})$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \left]\frac{2}{3}, 6\right[$.
   - ⋆ En utilisant les propriétés du logarithme népérien, on a : $\ln[x(2x + 4)] = \ln[(3x - 2)(6 - x)]$. Ce qui est équivalent à $x(2x+4) = (3x-2)(6-x)$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En passant tout du même côté et en développant, on obtient : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{6}{5}, 2\right\}}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2^{2x+1} + 2^x = 1}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On a : $2^{2x+1} + 2^x = 1 \Leftrightarrow 2 \times (2^x)^2 + 2^x - 1 = 0$. On pose $X = 2^x$, et on doit résoudre

$2X^2+X-1=0$. Le discriminant est 9 et les racines sont ainsi -1 et $\frac{1}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
2^{2x+1}+2^x=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{x\ln 2}=-1 \\ \text{ou} \\ e^{x\ln 2}=\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{x\ln 2}=\frac{1}{2} \qquad \text{car } e^{x\ln 2}>0 \\
&\Leftrightarrow \quad x\ln 2=-\ln 2 \qquad \text{car la fonction logarithme est strictement croissante} \\
&\Leftrightarrow \quad x=-1.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\boxed{\mathcal{S}=\{-1\}}$.

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2e^{2x}-e^{x}-1\leq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X=e^x$ et on doit résoudre $2X^2-X-1\leq 0$. On obtient $X\in\left]-\frac{1}{2},1\right[$, soit $e^x>-\frac{1}{2}$ et $e^x<1$. La première équation est toujours vraie, et la deuxième équivaut à $x<0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,0]}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2\ln(x)+\ln(2x-1)>\ln(2x+8)+2\ln(x-1)}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=]1,+\infty[$.
   - ⋆ En utilisant les propriétés du logarithme népérien et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on doit résoudre $5x^2-14x+8<0$. En n'oubliant pas le domaine de définition, on obtient $\boxed{\mathcal{S}=]1,2[}$.

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{4e^{x}-3e^{\frac{x}{2}}\geq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X=e^{\frac{x}{2}}$ et cela revient à résoudre $4X^2-3X\geq 0\Leftrightarrow X(4X-3)\geq 0$. Ce qui est équivalent à $e^{\frac{x}{2}}\leq 0$ ou $e^{\frac{x}{2}}\geq\frac{3}{4}$. La première inéquation est impossible et la deuxième donne $\boxed{\mathcal{S}=\left[2\ln\left(\frac{3}{4}\right),+\infty\right[}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{9^{x}-2\times 3^{x}-8>0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On peut remarquer que : $9^x=(3^x)^2$. Ainsi on pose $X=3^x$ et on obtient que : $X^2-2X-8>0$. Le discriminant vaut $\Delta=36$ et les racines sont -2 et 4. Ainsi on doit résoudre $3^x<-2$ ou $3^x>4$. Or on sait que $3^x=e^{x\ln 3}$ ainsi la première inéquation est impossible et la deuxième inéquation donne : $3^x>4\Leftrightarrow x>\frac{\ln 4}{\ln 3}$ en composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et car $\ln 3>0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=\left]\frac{\ln 4}{\ln 3},+\infty\right[}$.

Correction 13. Utilisation d'une étude de fonction.

1. **Montrons que $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \leq \ln(\mathbf{1}+\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}$:**
   On démontre l'inégalité en deux temps.
   - Montrons d'abord que pour tout $x > 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$:

     On pose pour cela la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et somme de fonctions dérivables. On obtient pour tout $x \geq 0$: $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$. Comme on est sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) \geq 0$. On obtient donc les variations suivantes en utilisant le fait que $f(0) = 0$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	

     Ainsi 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient bien que pour tout $x > 0$: $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$, à savoir $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.
   - On montre de même la deuxième inégalité en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$.
2. **Montrons que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{e^x} - \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \geq \mathbf{1}$:**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f'(x) = e^x - x.$$

   Or on a montré dans le cours (il faudrait refaire le raisonnement) que l'on a $e^x \geq x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors le tableau de variation suivant

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

   Justifions les limites aux bornes : on a : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. L'étude en $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme dominant à savoir e^x et on obtient ainsi : $f(x) = e^x\left(1 - \frac{x^2}{2e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2e^x} = 0$. Ainsi par quotient, somme et produit de limite, on obtient que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Ainsi, 0 est le minimum de f atteint en $x = 0$ et donc la fonction f est toujours positive ou nulle.
   Ainsi, on a bien

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq \frac{x^2}{2} + 1.}$$

Correction 14.

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **:** on a $\frac{pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

soit après simplification : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$.

- **Calcul de** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **:** de même, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

soit après simplification : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$.

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ **:** à partir du calcul précédent, on a :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}}{4}}$$

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **et** $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **:** Il suffit de remarquer que : $\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}$. On pose alors $\theta=\frac{\pi}{8}$ et on obtient par la formule de duplication des angles : $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$. Ainsi,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$

Le réel $\frac{\pi}{8}$ est dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et le cosinus est positif sur cet intervalle, ainsi :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}.}$$

Une fois le cosinus connu, le sinus se déduit par la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. On obtient ainsi,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{\sqrt{2}+2}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Là encore, le sinus étant positif sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.}$$

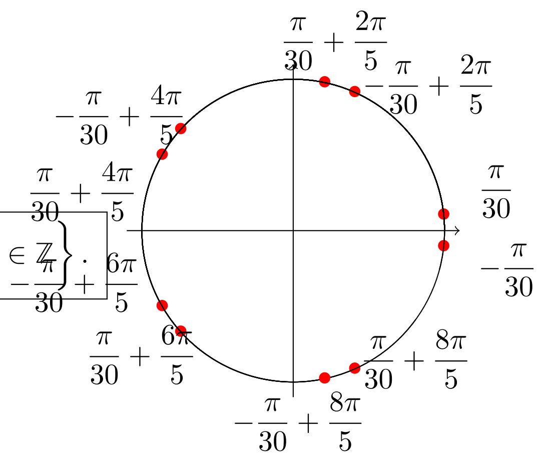
Correction 15. Il s'agit dans cet exercice d'égalités trigonométriques fondamentales que l'on résout donc en appliquant la méthode du cours.

1. **Résolution de $\cos(\mathbf{5x}) = \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$:** L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$



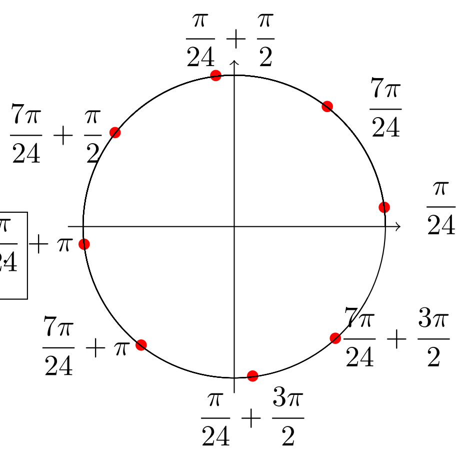
Pour savoir combien de points tracer sur le cercle pour chaque ensemble de solutions, on cherche la première valeur de k pour laquelle on retombe sur la solution de départ modulo 2π. Par exemple, pour le premier ensemble de solution, on cherche k tel que $\dfrac{2k\pi}{5} = 2\pi$, soit $k = 5$: on doit donc tracer 5 points sur le cercle trigonométrique. Même chose pour le deuxième ensemble de solutions.

2. **Résolution de $\sin(\mathbf{4x}) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$:** L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\sin(4x) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(4x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$



On remarque ici qu'il faut tracer 4 points pour chaque ensemble de solutions : en effet, on doit chercher k tel que $\dfrac{k\pi}{2} = 2\pi$, soit $k = 4$.

3. **Résolution de** $\tan\left(\mathbf{\frac{x}{2}}\right)$ **:** L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

On obtient donc

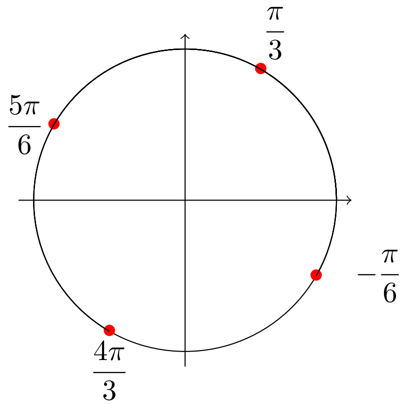
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

4. **Résolution de** $\tan(\mathbf{2x}) = -\sqrt{\mathbf{3}}$ **:** L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\tan(2x) = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan(2x) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$



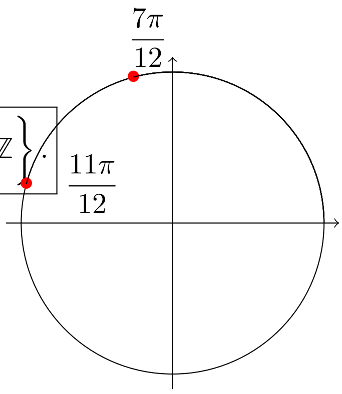
Correction 16.

1. **Résolution de** $\sin\mathbf{x} - \cos\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}}$ **:** On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$, on applique donc la méthode associée. On obtient alors

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x - \frac{3\pi}{4} & = & \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x - \frac{3\pi}{4} & = & -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$$

On obtient ainsi :



- Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{11\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

- Sur $[0, 2\pi[$ comme sur $]-\pi, \pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}.}$$

2. **Résolution de $-\sqrt{3}\sin \mathbf{x} + \cos \mathbf{x} = \sqrt{2}$:** Même méthode que dans l'exemple précédent. On obtient ainsi
   - Sur $\mathbb{R}$:

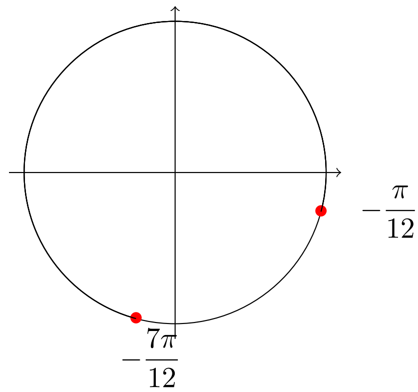
$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

   - Sur $[0, 2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}.}$$

   - Sur $[-\pi, \pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}\right\}.}$$

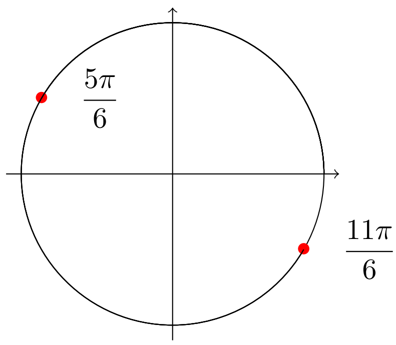


3. **Résolution de $\sin \mathbf{x} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\cos \mathbf{x} = \mathbf{0}$:** Même méthode que dans l'exemple précédent. On a :

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

On obtient ainsi :

- Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$
- Sur $[0, 2\pi[$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.}$
- Sur $[-\pi, \pi[$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}.}$



4. **Résolution de $\cos(\mathbf{2x}) + \sqrt{\mathbf{3}}\sin(\mathbf{2x}) = \sqrt{\mathbf{2}}$:** Quitte à poser $X = 2x$, l'égalité est de type $a\cos(X) + b\sin(X) = c$, on applique donc la méthode du cours. On se ramène ainsi à l'équation fondamentale suivante : $\cos(X - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi,

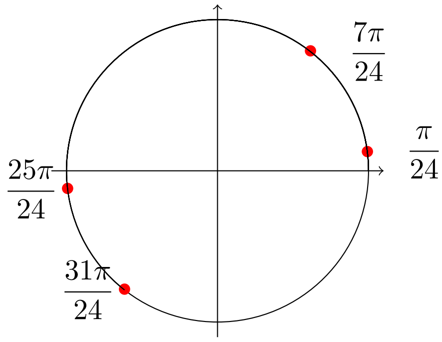
$$\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

- Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{7\pi}{24} + k\pi\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{24} + k\pi\right\}.}$

- Sur $[0, 2\pi[$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{31\pi}{24}\right\}.}$

- Sur $]-\pi, \pi]$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{23\pi}{24}, -\frac{17\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}\right\}.}$



Correction 17.

1. Tout d'abord, $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) On a $1 + u^2 > 0$ donc $\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x.$$

   (b) De même, $1 + u^2 > 0$ donc $\dfrac{2u}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a

$$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{1} = \sin x.$$

   (c) On a $1 - u^2 \neq 0$ si et seulement si $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 1$, c'est-à-dire $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \notin \{-1, 1\}$. On doit donc avoir $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$. On a alors :

$$\frac{2u}{1-u^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

2. L'équation est définie pour $\dfrac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Le domaine de définition est donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in}$
   On pose alors $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, et on utilise les formules de la question précédentes pour transformer l'équation. On est ramenés à résoudre

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} - 3\frac{2u}{1+u^2} + 2u - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - u^2 - 6u + 2u + 2u^3 - 1 - u^2}{1+u^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2u(u^2 - u - 2)}{1+u^2} = 0.$$

   On doit donc trouver les u tels que le numérateur s'annule. On obtient $u \in \{0, -1, 2\}$. On doit ensuite revenir à la variable x, on résout donc

   - $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   - $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctan(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \arctan(2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{S = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2\arctan 2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$$

II. 7 Racine carrée

Correction 18.

Correction 19.

reelcorrection8.tex

Correction 20.

1. **Valeurs de a pour que R(a) soit bien défini :**
Pour que $R(a)$ soit bien définie, il faut déjà que $a - 1 \geq 0$, c'est-à-dire que $a \geq 1$. On suppose donc que $a \geq 1$. Sous cette hypothèse, on a donc que $a + 2\sqrt{a-1} > 0$ comme somme d'un terme strictement positif et d'un autre terme positif. Il reste à étudier $a - 2\sqrt{a-1}$.
$$a - 2\sqrt{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{a-1} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$
On est passé au carré tout en conservant l'équivalence car les deux termes sont bien positifs. Le discriminant de la dernière inéquation est strictement négatif ($\Delta = -4$) et ainsi, on a $a^2 - 2a + 1 > 0$, d'où $a - 2\sqrt{a-1} > 0$. Finalement, on obtient
$$\boxed{\mathcal{D}_R = [1, +\infty[.}$$

2. **Simplifions R(a) :**
On suppose donc que $a \geq 1$. Ainsi, $R(a)$ a bien un sens et on peut calculer $R(a)^2$. On obtient
$$R(a)^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2} = 2a + 2|a - 2|.$$
Ainsi, si $1 \leq a \leq 2$, on obtient
$$R(a)^2 = 2a + 2(-a + 2) = 4 \quad \text{donc} \quad R(a) = 2$$
car $R(a) = -2$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées). Et si $a \geq 2$, on obtient
$$R(a)^2 = 2a + 2(a - 2) = 4(a - 1) \quad \text{donc} \quad R(a) = 2\sqrt{a-1}$$
car $R(a) = -2\sqrt{a-1}$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées).
On a donc obtenu :
$$\boxed{\forall a \geq 1,\ R(a) = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{a-1} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}}$$

III Etudes de fonctions

III. 1 *Études de fonctions*

Correction 21.

1. Étude de f : on fait un tableau donnant les valeurs de f selon la valeur de x :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$\|2x-3\|$		$-2x+3$	0	$2x-3$		$2x-3$	
$\|x-5\|$		$-x+5$		$-x+5$	0	$x-5$	
$f(x)$		$-3x+8$		$x+2$		$3x-8$	

On peut alors tracer la fonction qui correspond à 3 bouts de droite, qui se rejoignent en $\frac{3}{2}$ et en 5.

2. Étude de g : On fait de même pour la fonction g :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		-1		1		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$\|2x^2-5\|$		$2x^2-5$	0	$5-2x^2$		$5-2x^2$		$5-2x^2$	0	$2x^2-5$	
$\|x^2-1\|$		x^2-1		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1		x^2-1	
$f(x)$		x^2-4		$-3x^2+6$		$-x^2+4$		$-3x^2+6$		x^2-4	

Correction 22.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi on a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
2. On commence par donner l'expression de $f(x)$ selon les valeurs de x.
   - Si $x > 0$, on a : $f(x) = xe^{|\ln x|}$. Il s'agit alors d'étudier le signe de $\ln x$.
     - $\star$ Si $x \geq 1$, on obtient : $f(x) = xe^{\ln x} = x^2$.
     - $\star$ Si $0 < x < 1$, on obtient : $f(x) = xe^{-\ln x} = xe^{\ln \frac{1}{x}} = x \times \frac{1}{x} = 1$.
   - Si $x < 0$, on a : $f(x) = xe^{|\ln(-x)|}$. Là encore, il s'agit d'étudier le signe de $\ln(-x)$:
     - $\star$ Si $-1 \leq x < 0$ alors $0 < -x \leq 1$ et on obtient : $f(x) = xe^{-\ln(-x)} = xe^{\ln \frac{-1}{x}} = x \times \frac{-1}{x} = -1$.
     - $\star$ Si $x < -1$ alors $-x > 1$, on obtient : $f(x) = xe^{\ln(-x)} = -x^2$.

   Ainsi, on obtient les valeurs suivantes pour f selon les valeurs de x :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-x^2$	-1	1	x^2	

Correction 23.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos x \sin x \neq 0$. Or on a : $\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Réduction d'intervalle :
   - Montrons que f est π périodique : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a bien $x + \pi \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+\pi) = \ln|\cos(x+\pi)\sin(x+\pi)| = \ln|-\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$. Ainsi la fonction f est π périodique et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
   - Montrons que f est paire : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = \ln|\cos(-x)\sin(-x)| = \ln|\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire et le fait que $|-1| = 1$. Ainsi la fonction f est paire et on peut restreindre l'étude à $]0, \frac{\pi}{2}[$.
   - Soit $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| = \ln|\sin x \cos x| = f(x)$ en utilisant le formulaire de trigonométrie.
     On peut faire un dessin pour s'en rendre compte mais une telle égalité signifie que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie pour la courbe. Ainsi on peut étudier la fonction sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis faire la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$ pour obtenir la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
3. La fonction $x \mapsto \cos x \sin x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme produit de fonctions dérivables. De plus, sur cet ensemble, cette fonction ne s'annule pas. Comme la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on obtient que $x \mapsto |\cos x \sin x|$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition. Comme sur cet intervalle, la fonction est à valeurs strictement positives et que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, f est bien dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition.

   De plus, en étudiant des cas, on sait que $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ si u dérivable. Ainsi ici on obtient que : $f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\cos(2x)}{\cos x \sin x}$.
   Sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ et $\cos(2x) \geq 0$ car $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi on a : $f'(x) \geq 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$-\ln 2$

   En effet : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les produit et composées de limites.

Correction 24.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

- Étude de la parité : $\mathbb{R}$ est centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 3\cos(-x) - \cos(-3x) = 3\cos x - \cos(3x)$ car la fonction f est paire. Ainsi $f(-x) = f(x)$, et la fonction f est paire.
- Étude de la périodicité : vérifions que la fonction est 2π périodique :
  - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3(x+2\pi)) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3x+6\pi) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus.

  Ainsi la fonction f est 2π périodique.

Par 2π périodicité, on peut restreindre l'étude à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. Puis par parité, on peut restreindre l'intervalle à $[0, \pi]$. La courbe $\mathcal{C}_f$ sera alors obtenue par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -3\sin x + 3\sin(3x) = -3(\sin x - \sin(3x)) = -3 \times 2\cos(2x)\sin(-x) = 6\cos(2x)\sin(x)$ en utilisant une formule de trigonométrie et le fait que la fonction sinus est impaire.
3. Étude du signe de f' sur $[0, \pi]$:
   Sur $[0, \pi]$, on a : $\sin(x) \geq 0$ et ainsi le signe de f' ne dépend que du signe de $\cos(2x)$. On a : $\cos(2x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$. En faisant un cercle trigonométrique, on remarque que sur $[0, \pi]$, on obtient : $\cos(2x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$. On obtient ainsi le tableau des variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2

4.
   - La fonction f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ existe bien et son équation est : $y = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$. On obtient ainsi : $y = -6(x - \frac{\pi}{2})$.
   - La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$. On obtient donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$ ou $\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$.

Correction 25.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $2x \neq 0$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \frac{-1}{2x^2}$.
2.
   - Limites en $\pm\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ d'après le théorème des monomes de plus haut degré. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$ au voisinage de $\pm\infty$.
   - Limites en 0 : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les somme et quotient de limites. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

   On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
f	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

3. Déjà fait à la question précédente.
4. La fonction f est dérivable en 1 ainsi la tangente T_1 à la courbe au point d'abscisse 1 existe bien et son équation est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Les calculs donnent : $y = -\frac{1}{2}(x-1)$.
5.
   - Le domaine de définition est bien centré en 0 car : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, -x \in \mathbb{R}^\star$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, on a : $f(-x) = \frac{x+1}{-2x} = -\frac{x+1}{2x}$ et $-1-f(x) = \frac{-2x+x-1}{2x} = -\frac{x+1}{2x}$. Ainsi, on a bien : $f(-x) = -1 - f(x)$.

   On cherche alors une symétrie s entre les points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$ sur le graphe de f, soit s telle que $(-x, f(-x)) = s(x, f(x))$. Pour cela, essayons de trouver quelles conditions doit vérifier $(x, f(x))$ pour que le point soit inchangé par la symétrie. Le point $(x, f(x))$ est un point fixe de s si on a $s(x, f(x)) = (x, f(x))$. Or $s(x, f(x)) = (-x, f(-x))$, donc on doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x & = & x \\ f(-x) & = & f(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & 0 \\ -1-f(x) & = & f(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ f(x) & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

   Le seul point fixe de la transformation est $\Omega\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. On vérifie alors que l'on a bien : $\frac{x+(-x)}{2} = 0$ et $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = -\frac{1}{2}$, autrement dit que Ω est le milieu entre les points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$. On obtient alors que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
6. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$: $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1-2x^2}{2x} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 9$ et les deux racines sont -1 et $\frac{1}{2}$. Ces solutions correspondent aux abscisses des points fixes pour la fonction f.

Correction 26.

1. Soit $m \in \mathbb{R}^\star$ fixé. La fonction f_m est bien définie si et seulement si : $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$ et ainsi $\mathcal{D}_{f_m} =]-1, +\infty[$.
2.
   - Limite en -1 : par propriété sur les somme, composée et produit de limite $\lim\limits_{x \to -1^+} x \ln(1+x) = +\infty$. Ainsi on doit distinguer deux cas selon que $m > 0$ ou $m < 0$.
     - ⋆ Si $m > 0$, alors $\lim\limits_{x \to -1^+} f_m(x) = +\infty$ par propriété sur les produit et composée de limite.
     - ⋆ Si $m < 0$, alors $\lim\limits_{x \to -1^+} f_m(x) = 0$ par propriété sur les produit et composée de limite.
   - Limite en $+\infty$: par propriété sur les somme, composée et produit de limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1+x) = +\infty$. Ainsi on doit distinguer deux cas selon que $m > 0$ ou $m < 0$.
     - ⋆ Si $m > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$ par propriété sur les produit et composée de limite.
     - ⋆ Si $m < 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 0$ par propriété sur les produit et composée de limite.

3. Soit $m \in \mathbb{R}^\star$ fixé. La fonction f_m est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme somme, composée et produit de limite. De plus, on a, pour tout $x > -1$:
$$f_m'(x) = e^{mx\ln(1+x)}\left(m\ln(1+x) + \frac{mx}{1+x}\right) = me^{mx\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) = mf_m(x)g_m(x)$$
avec $g_m(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.
4. Comme on ne sait pas étudier le signe de g_m directement, on étudie les variations de cette fonction pour en déduire son signe.
   - La fonction g_m est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composé, quotient et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > -1$, on a : $g_m'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$.
   - On en déduit les variations suivantes :

x	-1		0		$+\infty$
$g_m'(x)$		$+$		$+$	
g_m	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   - Justifions les limites :
     - $\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$ d'après le théorème des monomes de plus haut degré. Ainsi par propriété sur les composée et somme de limite, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_m(x) = +\infty$.
     - $\star$ $\lim\limits_{x\to-1^+} g_m(x) = -\infty$ par propriétés sur les quotient, compsée et somme de limites.
     - $\star$ $g_m(0) = 0$.
5. On connaît ainsi le signe de g_m : négatif ou nul sur $]-1,0]$ et strictement positif sur $]0,+\infty[$. Comme une exponentielle est toujours strictement positive et que $f_m' = mf_mg_m$, on en déduit le signe de f_m' selon si $m > 0$ ou $m < 0$.
   - Si $m > 0$, alors le signe de f_m' est celui de g_m et on obtient donc :

x	-1		0		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	0	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   - Si $m < 0$, alors le signe de f_m' est l'opposé de celui de g_m et on obtient donc :

x	-1		0		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	0	$-$	
f_m	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Correction 27.

1. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et produit de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2x+1).}$
2. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $x^2+1 \geq 0$ et $\sqrt{x^2+1} \neq 0$. Ainsi elle est bien définie si et seulement si $x^2+1 > 0$ ce qui est toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et car $x^2+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\cos x\sqrt{x^2+1} - \sin x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \dfrac{(x^2+1)\cos x - x\sin x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
3. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \sqrt{e^x}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $e^x \geq 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$.
4. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = e^{x\cos(x)}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = [\cos(x) - x\sin(x)]\, e^{x\cos x}.}$
5. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x - x^2 \geq 0$. C'est un polynôme de deré 2 dont les racies sont 0 et 1. Donc $\mathcal{D}_f = [0,1]$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable si $x - x^2 > 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme somme, coposée et produti de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\boxed{f'(x) = \left[\dfrac{(1-x)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} - 1\right] e^{\sqrt{x-x^2}}.}$
6. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $2 + \cos(5x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(5x) \neq -2$: impossible car un cosinus est toujours compris entre -1 et 1. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composée, somme et quotient de fonctions dérivables.

- Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :
$$\boxed{f'(x) = \frac{\sin^2(2x)}{(2+\cos(x))^2}\left[12\cos(2x) + 6\cos(2x)\cos(5x) + 5\sin(2x)\sin(5x)\right].}$$

7. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)} = \sin(\ln \mathbf{x})$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}.}$
8. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)} = \ln(\mathbf{e^x + x^2})$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $e^x + x^2 > 0$: toujours vrai comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2}$.
9. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x - e^x}}{\mathbf{e^x + 1}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $e^x + 1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes tous les deux strictement positifs, une exponentielle étant toujours strictement positive. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{1 - xe^x}{(e^x+1)^2}.}$
10. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)} = \ln\left(\frac{\mathbf{x+2}}{\sqrt{\mathbf{9x^2-4}}}\right)$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $\frac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}} > 0$. Comme une racine carrée est toujours positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $x + 2 > 0$. La première condition est un polynôme de degré 2 dont les racines sont $-\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Donc $\mathcal{D}_f = \left]-2, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ (car ce qui est sous la racine est déjà strictement positif) comme produit, sommes, composées et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{-2(9x+2)}{(x+2)(9x^2-4)}.}$
11. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{(\cos(\mathbf{x}))^{\mathbf{4}}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos^4(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{4\sin(x)}{(\cos(x))^5}.}$

12. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{2^{x+1}}}$:**
   - <u>Ensemble de définition :</u> La fonction f est bien définie si et seulement si $2^{x+1} \neq 0 \Leftrightarrow e^{(x+1)\ln 2} \neq 0$: toujours vrai car une exponentielle est toujours strictement positive. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - <u>Ensemble de dérivabilité :</u> La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composée et quotient de fonctions dérivables.
   - <u>Dérivée :</u> Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-\ln 2}{2^{x+1}}.}$ On peut pour cela remarquer que $f(x) = e^{-(x+1)\ln 2}$.
13. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = (e^{2x} - 1)^{\pi}}$:**
   - <u>Ensemble de définition :</u> La fonction f est bien définie si et seulement si $e^{2x} - 1 > 0$ car on a : $(e^{2x} - 1)^{\pi} = e^{\pi \ln(e^{2x}-1)}$. Or $e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$ par passage au logarithme népérien qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - <u>Ensemble de dérivabilité :</u> La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée, somme et produit de focntions dérivables.
   - <u>Dérivée :</u> Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{2\pi e^{2x}}{e^{2x} - 1}(e^{2x} - 1)^{\pi}.}$
14. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x^2 + 3x}}{3^x}\right)^4}$:**
   - <u>Ensemble de définition :</u> La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 + 3x \geq 0$ et $3^x = e^{x\ln 3} \neq 0$. La deuxième condition est toujours vérifiée car une exponentielle est toujours strictement positive. Pour la première condition, on reconnaît un polynôme de degré 2 dont les racines sont 0 et -3. Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$.
   - <u>Ensemble de dérivabilité :</u> La fonction f est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$ car on doit avoir $x^2 + 3x > 0$ puis comme sommes, produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
   - <u>Dérivée :</u> Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{2(x^2 + 3x)}{3^{4x}}\left[2x + 3 - 2(x^2 + 3x)\ln 3\right].}$
15. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = 2^{\ln x}}$:**
   - <u>Ensemble de définition :</u> La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ en écrivant que $2^{\ln x} = e^{\ln(x)\ln 2}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - <u>Ensemble de dérivabilité :</u> La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   - <u>Dérivée :</u> Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x}2^{\ln x}.}$
16. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}}$:**
   - <u>Ensemble de définition :</u> La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$, $\ln x \geq 0$ et $x \neq 0$. La deuxième condition donne : $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Donc $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$.
   - <u>Ensemble de dérivabilité :</u> La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir $\ln x > 0$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
   - <u>Dérivée :</u> Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{2x^2\sqrt{\ln x}}.}$
17. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln(\ln x)}$:**

- Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) > 0$. Or on a : $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.
- Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
- Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}.}$

18. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}+x)}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{x^2-1}+x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > -x$ et $x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On doit donc étudier deux cas afin de résoudre la première inéquation :
      - ⋆ Si $x \geq 1$, alors $-x \leq -1$ et l'inéquation est toujours vérifiée car une racine carrée est toujours supérieure à un nombre négatif.
      - ⋆ Si $x \leq -1$ alors $-x \geq 1$ et on peut donc passer au carrée tout en conservant l'équivalence, la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors : $\sqrt{x^2-1} > -x \Leftrightarrow x^2-1 > x^2 \Leftrightarrow -1 > 0$. Toujours faux.

      Donc $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir en plus $x^2-1 > 0$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$

19. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x^x = e^{x\ln x} \neq 0$. La deuxième inéquation est toujours vérifiée, une exponentielle étant toujours strictement négative. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$ (on commence par écrire que : $\dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x} = \dfrac{\cos(x)e^{(x-1)\ln(3)}}{e^{x\ln x}}$).
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^{(x-1)\ln(3)}}{x^x}[-\sin(x) + \ln(3)\cos(x) - \cos(x)(\ln(x)+1)].}$

Correction 28.

1. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\ln(|x^2-1|)}{x}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $|x^2-1| > 0$ et $x \neq 0$. Or une valeur absolue est toujours positive ou nulle donc on a : $|x^2-1| > 0 \Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{-1, 1\}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme, composée et quotient de fonctions dérivables (il y a une valeur absolue mais on a bien $x^2-1 \neq 0$ sur $\mathcal{D}_f$ donc le domaine de dérivabilité est bien égal au domaine de définition).
    - Dérivée : Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1	
$f(x)$		$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	||	$\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$	||	$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	

On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

- $\star$ Si $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$: on a alors $f'(x)=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$.
- $\star$ Si $x\in]-1,0[\cup]0,1[$: on a alors $f'(x)=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(1-x^2)}{x^2(x^2-1)}$.

On peut remarquer que l'on peut regrouper ces deux cas en une formule générale en utilisant de nouveau la valeur absolue et on obtient : $\boxed{\forall x\in\mathcal{D}_f,\ f'(x)=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln|x^2-1|}{x^2(x^2-1)}.}$

2. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|e^x-1|+1}}}$:**

- Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $|e^x-1|+1>0$: toujours vrai comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif car $1>0$ et une valeur absolue est toujours positive ou nulle. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
- Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable si et seulement si $x\in\mathcal{D}_f$ et $e^x-1\neq 0$ (à cause de la présence de la valeur absolue). Or on a : $e^x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme composée et quotient de fonctions dérivables.
- Dérivée : Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert e^x-1\rvert$		$1-e^x$	0	e^x-1	
$f(x)$		$\dfrac{x}{\sqrt{2-e^x}}$	||	$\dfrac{x}{\sqrt{e^x}}$	

On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

- $\star$ $\boxed{\text{Si } x\in]-\infty,0[\text{ : on a alors } f'(x)=\dfrac{4-2e^x+xe^x}{2(2-e^x)\sqrt{2-e^x}}.}$
- $\star$ $\boxed{\text{Si } x\in]0,+\infty[\text{ : on a alors } f'(x)=\dfrac{2-x}{2\sqrt{e^x}}.}$

III. 3 Fonction majorée, minorée, bornée

Correction 29. Seule une étude des variations de la fonction assure que les bornes trouvées sont bien optimales.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0,+\infty[$.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Ainsi elle est en particulier bien définie sur $[0,+\infty[$.
   - Limites aux bornes : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par propriétés sur les somme et quotient de limite.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. Et pour tout $x \geq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$. Ainsi : $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$.
   - Tableau des variations :

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

   - Étude des extrema : la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$, et $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc f est majorée et minorée sur $\mathbb{R}^+$. On obtient : $\sup_{[0,+\infty[} f = \max_{[0,+\infty[} f = 1$ et $\inf_{[0,+\infty[} f = 0$.
2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   - Étude de la périodicité :
     - ⋆ $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$.
     - ⋆ Soit $x \in \mathcal{D}_f$: $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité des fonctions sinus et cosinus.

     Ainsi la fonction f est 2π périodique. Ainsi on peut restreindre l'étude de la fonction f à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple : $[-\pi, \pi]$.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x + \cos x$.
     On étudie alors le signe de f sur $[-\pi, \pi[$: on reconnaît une expression de la forme : $a\cos x + b\sin x$, on obtient donc : $f'(x) = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
     Étude du signe : on a
     $$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}+2k\pi.$$
     On peux alors faire un cercle trigonométrique et on voit alors que sur $[-\pi, \pi[$, on a : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.
   - Tableau des variations :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1

- Étude des extrema : on a f décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, donc f admet un minimum en $-\frac{3\pi}{4}$ qui vaut $-\sqrt{2}$. De même, f admet un minimum en $\frac{\pi}{4}$ qui vaut $\sqrt{2}$. La fonction f est donc bornée sur $[-\pi, \pi]$: elle est majorée par $\sqrt{2}$ et minorée par $-\sqrt{2}$. Comme ces deux nombres sont atteints, on obtient : $\sup_{\mathbb{R}} f = \max_{\mathbb{R}} f = \sqrt{2}$ et $\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = -\sqrt{2}$. On utilise ici aussi la 2π périodicité de f pour passer de l'intervalle $[-\pi, \pi[$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + \ln(x)}$ sur $[1, +\infty[$.
   - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $1 + \ln x \neq 0$. On obtient ainsi : $1 + \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq e^{-1}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{-1} < 1$, la fonction f est donc en particulier bien définie sur $[1, +\infty[$.
   - Limites aux bornes : on a : $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par propriété sur les somme et quotient de limite.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > 1$, on a en particulier : $f'(x) = \dfrac{-1}{x(1 + \ln x)^2}$. Comme on est sur $[1, +\infty[$, on a : $x > 0$. Ainsi comme un carré est toujours positif, on obtient : $f'(x) < 0$.
   - Tableau des variations :

x	1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

   - Étude des extrema : La fonction f est ainsi majorée par 1 et minorée par 0. Comme $1 = f(1)$, 1 est atteint et ainsi c'est le maximum de f sur $[1, +\infty[$: $\sup_{[1,+\infty[} f = \max_{[1,+\infty[} f = 1$. Le nombre 0 n'est jamais atteint car c'est une limite et ainsi, on obtient 0 est la borne inférieure de f sur $[1, +\infty[$ mais il n'y a pas de minimum.

4. $f : x \mapsto 5\ln(x) - x + \dfrac{6}{x}$ sur $[1, 6]$ (on donne $5\ln(3) \leq 6$).
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$ et en particulier f est bien définie sur $[1, 6]$.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{5}{x} - 1 - \dfrac{6}{x^2} = \dfrac{-x^2 + 5x - 6}{x^2}$. Le discriminant vaut $\Delta = 1$ et les racines sont 2 et 3.
   - Tableau des variations :

x	0	1		2		3		6		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	0		$-$		
f	$\searrow$	5	$\searrow$	$5\ln 2 + 1$	$\nearrow$	$5\ln 3 - 1$	$\searrow$	$5\ln(6) - 5$	$\searrow$	

- Étude des extrema : La fonction f est ainsi majorée et minorée sur $[1,6]$. Comme $5\ln 3 - 1 \leq 5$, on obtient que $\sup_{[1,6]} f = \max_{[1,6]} f = 5$. Et comme $5\ln 2 + 1 > 5\ln 6 - 5$, on a : $\inf_{[1,6]} f = \min_{[1,6]} f = 5\ln 6 - 5$.

III. 4 Parité, imparité, périodicité, symétrie

Correction 30.

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x^2 \geq 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = f(x)$. Donc la fonction f est paire.
2. $f(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et $\forall x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = (-x)^2+(-x)^4+(-x)^6+(-x)^8 = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 = f(x)$. Donc la fonction f est paire.
3. $f(x) = x + x^3 + x^5 + 2x^7$:
   - Domaine de définition : la fonction f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = -x+(-x)^3+(-x)^5+2(-x)^7 = -x - x^3 - x^5 - 2x^7 = -(x + x^3 + x^5 + 2x^7) = -f(x)$ Donc la fonction f est impaire.
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\dfrac{1-|x|}{2-|x|} \geq 0$ et $2 - |x| \neq 0$. Comme il y a une valeur absolue, on fait des cas :
     - ⋆ Si $x \geq 0$: on doit résoudre : $\dfrac{1-x}{2-x} \geq 0$. Un tableau de signe en prenant en compte le fait que $x \geq 0$ donne : $x \in [0,1] \cup]2, +\infty[$.
     - ⋆ Si $x < 0$: on doit résoudre : $\dfrac{1+x}{2+x} \geq 0$. Un tableau de signe en prenant en compte le fait que $x < 0$ donne : $x \in]-\infty, -2[\cup [-1, 0]$.

     Ainsi, on obtient $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup [-1,1] \cup]2; +\infty[$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = \sqrt{\dfrac{1-|-x|}{2-|-x|}} = \sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}} = f(x)$ car $|-x| = |-1| \times |x| = |x|$. Donc la fonction f est paire.
5. $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^2+|x|}$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2+|x| \neq 0$. Or cette expression est toujours positive, comme somme de termes positif, et s'annule uniquement si les deux termes s'annule, c'est-à-dire si et seulement si $x = 0$. Ainsi, on obtient $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3x}{(-x)^2 + |-x|} = \dfrac{-x^3-3x}{x^2+|x|} = -f(x)$. Donc la fonction f est impaire.
6. $f(x) = |x+1| - |x-1|$:

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = |-x+1| - |-x-1| = |-(x-1)| - |-(x+1)| = |-1||x-1| - |-1||x+1| = |x-1| - |x+1| = -(|x+1| - |x-1|) = -f(x)$. Donc la fonction f est impaire.

7. $f(x) = \sin x + \cos x$
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : pas de parité : la fonction f n'est ni paire, ni impaire.
   - Étude de la périodicité : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité des fonctions sinus et cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.
8. $f(x) = \cos x + \cos(2x)$
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$: $f(-x) = \cos(-x) + \cos(-2x) = \cos x + \cos 2x = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire. Donc la fonction f est paire.
   - Étude de la périodicité : $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \cos(2(x+2\pi)) = \cos x + \cos(2x+4\pi) = \cos(x) + \cos(2x) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.

Correction 31. On considère deux fonctions f et g toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f \circ g$ est impaire.
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est elle aussi impaire, on obtient : $f[-g(x)] = -f[g(x)] = -f \circ g(x)$. Ainsi : $f \circ g(-x) = -f \circ g(x)$.

   Donc $f \circ g$ est impaire et on a bien montré que la compoée de deux fonctions impaires est impaire.
2. On suppose par exemple que f est paire et que g est impaire. Montrons que $f \circ g$ est paire.
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est paire, on obtient : $f[-g(x)] = f[g(x)] = f \circ g(x)$. Ainsi : $f \circ g(-x) = f \circ g(x)$.

   Donc $f \circ g$ est paire et on a bien montré que la compoée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est paire.
3. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f + g$ est impaire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f+g)(-x) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x)$.

   Donc $f + g$ est impaire et on a bien montré que la somme de deux fonctions impaires est impaire.
4. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f \times g$ est paire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times (-g(x))$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f \times g)(-x) = f(x) \times g(x) = (f \times g)(x)$.

   Donc $f \times g$ est paire et on a bien montré que le produit de deux fonctions impaires est paire.

III. 5 Calculs de limites

Correction 32. Je ne détaille pas tous les calculs.

1. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par propriété sur les sommes et composées de limites, on obtient que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{x^2}. On obtient que $f(x) = e^{x^2}(1 - e^{-x^2+x+1})$. Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + x + 1 = -\infty$. Ainsi par propriété sur les sommes, composées et produit de limites, on obtient que : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.
2. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $e^{2x} + 1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes strictement positifs. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$. Puis par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites, on obtient que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur (e^x) et au dénominateur e^{2x}. On obtient alors que par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
3. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x - 1 \neq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1}$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
   - Limite en 0^- : Par propriété sur les somme, quotients et composée de limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0}$.
   - Limite en 0^+ : FI. On fait apparaître une croissance comparée en posant $X = \dfrac{1}{x}$ et en écrivant que : $xe^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^X}{X}$. Quand x tend vers 0^+, X tend vers $+\infty$ et par croissance comparée : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Enfin par propriété sur le quotient de limites, on obtient que $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0^+$.

- <u>Limites en 1 :</u> Par propriété sur les somme, quotients, composée et produit de limites, on a : $\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

4. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{e^x + x^2}{2x+1}\right)}$:**

- <u>Domaine de définition :</u> La fonction f est bien définie si $\dfrac{e^x + x^2}{2x+1} > 0$ et $2x+1 \neq 0$. Comme le numérateur est toujours strictement positif comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif, on a : $\dfrac{e^x + x^2}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

- <u>Limite en $-\dfrac{1}{2}^+$:</u> Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\boxed{\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty}$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

- <u>Limite en $+\infty$:</u> FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^x au numérateur et x au dénominateur. On obtient que : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1+\frac{x^2}{e^x}}{2+\frac{1}{x}}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les sommes, quotients, produit et composée de limites, on obtient que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

5. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \frac{2^x}{x^2+1}}$:**

- <u>Domaine de définition :</u> La fonction f est toujours bien définie car $x^2+1 \neq 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- <u>Limite en $-\infty$:</u> Par propriété sur les produits, somme, composée et quotient de limites, on a : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
- <u>Limite en $+\infty$:</u> FI donc on fait apparaître une croissance comparée en mettant en facteur x^2 terme dominant au dénominateur. On obtient que $f(x) = \dfrac{e^{\ln 2x}}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\ln 2x}}{x^2} = +\infty$. Puis par propriété sur les quotients, somme et produit de limites, on obtient que : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

6. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln x}$:**

- <u>Domaine de définition :</u> La fonction f est bien définie si $x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
- <u>Limite en 0^+ :</u> Par propriété sur les produits et composée de limites, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- <u>Limite en $+\infty$:</u> FI. On met le 2^x sous forme exponentielle : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{e^{x\ln 2}}$. Par théorème des croissances comparées, on a donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
Remarque : pour revenir au théorème énoncé dans le cours en multipliant et divisant par x.

On obtient que : $f(x)=\frac{x}{e^{\ln 2x}}\times\frac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\ln 2x}}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$, et on revient au résultat précédent.

7. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x\geq 0$ et $x\neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^{+\star}$.
   - Limite en 0^+ : Par propriété sur les composée et quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on transforme l'expression afin de faire apparaître une croissance comparée. On pose par exemple $X=\sqrt{x}$ et on obtient que $f(x)=F(X)=\frac{e^X}{X^4}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim\limits_{X\to+\infty}F(X)=+\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

8. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-2\neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
   - Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0}$.

9. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-2\neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
   - Par propriété sur les sommes, quotient, composée et produit de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0}$.

10. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x^2+1>0$ et $x\neq 0$ La première inéquation est toujours vraie comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$.
    - Limite en $-\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x)=2\frac{\ln|x|}{x}+\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}=0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.
    - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x)=2\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}=0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

- Limite en 0 : FI. L'idée ici est de faire apparaître un taux d'accroissement. On pose $g(x) = \ln(x^2+1)$. On a $f(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ car $g(0) = 0$. Or la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, donc on a $\lim_{x\to 0} f(x) = g'(0)$. De plus, $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, donc $g'(0) = 0$. On a donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$.

Correction 33. Je ne donne ici que les résultats et l'idée d'une méthode possible pour obtenir la limite.

1. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^7+4x^2-1}{x^9+1}}$: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^7+4x^2-1}{x^9+1} = 0}$: théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}}$: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2} = -\infty}$: théorème du monôme de plus haut degré.

3. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}}$: $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2} = +\infty}$: on met x en facteur puis propriété sur les limites.

4. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}}$: $\boxed{\lim_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{4}{3}}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites.

5. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to -5^+} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}}$: $\boxed{\lim_{x\to -5^+} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5} = -\infty}$: par propriété sur les limites.

6. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^3-1}}$: $\boxed{\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^3-1} = \dfrac{5}{3}}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites.

7. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{|x+2|}}$: $\boxed{\lim_{x\to -2^+} \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = 12}$ et $\boxed{\lim_{x\to -2^-} \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = -12}$: on met $x+2$ en facteur au numérateur puis propriété sur les limites.

8. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}}$: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1}$ et $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1}$ par propriété de la valeur absolue.

9. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} x^2-3x+1-x|x-3|}$: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2-3x+1-x|x-3| = 1}$ car on peut prendre $x > 3$ et par propriété de la valeur absolue.

10. **Calcul de :** $\mathbf{\lim_{x\to-\infty} x^2-3x+1-x|x-3|}$: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^2-3x+1-x|x-3| = +\infty}$ car on peut prendre $x < 3$ et par propriété de la valeur absolue.