Table des matières

Chapitre 3 - Suites réelles usuelles

I Notations $\sum$ et $\prod$

I. 1 Définitions

Définition 1. Soit n un entier naturel et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes. Leur somme est notée $\sum_{k=1}^{n} a_k$ Cela correspond à $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

La somme $\sum_{k=1}^{n} a_k$ NE DEPEND PAS DE k.

On a ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$

Remarque. Si le symbole $\sum$ vous semble complexe dans l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, ne pas hésiter à écrire la somme en extension $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pour mieux la comprendre.

Exercice 2.

1. Calculer les quatre sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-4)$.
2. Comparer $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} a_{5-k}$.
3. Écrire en extension $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} a_{3k+1}$.

Exercice 3. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:

1. $5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4$.
2. $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$.
3. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$.
4. $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$.

Définition 4. Soit n un entier naturel et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes.
Leur produit est noté ....
Cela correspond à $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemples. Calculer les produits suivants : $P_1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x$ et $P_2 = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(2j)$.

Exercice 5. Calculer $P_1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k$ et $P_2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

I. 2 Formalisme des récurrences

Théorème 6 (Axiome de récurrence)**.** Si $P(n)$ est une proposition telle que :

— $P(0)$ est vraie, (ou plus généralement $P(n_0)$ est vraie pour un certain entier $n_0 \in \mathbb{N}$)
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$,

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (ou plus généralement $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$)

Conseil rédactionnel ♥ :

- **On définit clairement la propriété à démontrer :**
  Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: ......
- **Initialisation :** pour $n = n_0$:
  On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $n \geq n_0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  ⚠ N'oubliez pas de signaler l'endroit où vous utilisez l'hypothèse de récurrence.
- **Conclusion :**
  Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 1. ♡ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Initialisation : Pour $n = 0$ on a d'une part :$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$. D'autre part on a : $\frac{0(0+1)(2*0+1)}{6} = 0$. La propriété P est donc vraie au rang 0.

Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons le membre de gauche de l'égalité de $P(n+1)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Par hypothése de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Mettons $(n+1)$ en facteur. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}.\\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}.\end{aligned}$$

Or $(2n^2+7n+6) = (2n+3)(n+2) = (2(n+1)+1)((n+1)+1)$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

La propriété P est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

□

I. 3 Propriétés

I. 3. a La linéarité de la somme

Proposition 7. Soient n un entier naturel. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels ou complexes, et soit λ un nombre réel ou complexe.

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + b_k) =$$

⚠ C'est faux avec la multiplication et la division : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} b_k}$ $(b_k \neq 0)$.

I. 3. b La relation de Chasles

Proposition 8. Soient n un entier naturel et $p \in [\![1, n-1]\!]$.
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$$

Exemples.

- $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j$
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} a_j = \sum_{j=0}^{n} a_j + a_{n+1}$

Exercice 9.

- Écrire avec une seule somme : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=n+1}^{2n} b_j =$
- Simplifier les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+2} a_i + \sum_{j=1}^{n+1} a_j - 2\sum_{k=2}^{n+1} a_k$.

I. 3. c Le changement d'indice

Exemples.

- Transformation de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}$:

- Transformation de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}$:

On pose $j = i+1,\ i+2,\ i-1,\ i-2, \dots$.
On doit alors :

- Regarder le nouvel ensemble de sommation
- Transformer i en $j-1$, $j-2$ $j+1$, $j+2$
- Changer les indices dans toute la somme.

Exercice 10. On pose : $S = \sum_{k=1}^{n} k$ et $T = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$. Montrer que $S = T$, puis calculer $S+T$. En déduire la valeur de S.

I. 4 Binome de Newton

I. 4. a Coefficients binomiaux : définition et propriétés

Définition 11. Soit (n, p) deux entiers naturels.

- Si $p \in [\![0, n]\!]$, on appelle coefficient binomial, le nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Par convention si $p \notin [\![0, n]\!]$: $\binom{n}{p} = 0$

Exemples.

- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n)!} = 1$, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$, $\quad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = n$,

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Remarque. Les coefficients binomiaux seront très utiles en dénombrement : $\binom{n}{p}$ est le nombre de tirages simultanés (sans ordre et sans répétition) de p boules parmi n.

Proposition 12. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

- Symétrie des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Exercice 13. Faire la preuve de la proposition (pas besoin de récurrence)

Correction

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!\,(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1))!\,(k-1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)n! + kn!}{(n-k+1)!\,k!} \quad \text{on met au même dénominateur} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(n-k+1)!\,k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Proposition 14. Soit $k \in [\![0, n]\!]$:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

En conséquence

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 15. Soit $(n, p, k, j) \in \mathbb{N}^4$ avec $k \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, k]\!]$. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$.

I. 4. b Binôme de Newton

Théorème 16 (Binôme de Newton)**.**

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ (et sur votre brouillon faite $n = 3$). On va prouver la formule par récurrence. On détaille les différentes étapes dans les prochaines questions :
2. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N},$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1}.$$

3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}$$

4. En déduire que

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

5. Conclure.

1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ (et sur votre brouillon faite $n=3$).

   Correction

   (a) $n=0$

   On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k b^{0-k} = a^0 b^0 = 1$

   (b) $n=1$

   On a $(a+b)^1 = a+b$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \binom{1}{0}a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1}a^1 b^{1-1} = a+b$

   (c) $n=2$

   On a $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^k b^{2-k} = \binom{2}{0}a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1}a^1 b^{2-1} + \binom{2}{2}a^2 b^{2-2} =$ $b^2+2ab+b^2$

   On va prouver la formule par récurrence. On détaille les différentes étapes dans les prochaines questions :

2. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}.$$

   Correction

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^{n-n}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1}\end{aligned}$$

   On fait le changement devariable $k+1=j$ sur la somme. On obtient $j \in [\![1,n]\!]$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n-j+1}$$

   Comme j est un indice muet, on peut le changer en k. On a donc la formule demandée.

3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}$$

Correction
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}$$
Maintenant on fait un changement de variable sur la première somme en posant $j = k+1$. On obtient :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^jb^{n-j+1}$$
On a donc, en se rappelant que j est muet et donc remplacable par k
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}$$
On applique la relation de Chasles au dernier terme de la première somme et au premier terme de la deuxième somme. On obtient :
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1} + \binom{n}{n+1-1}a^{n+1}b^{n-(n+1)+1}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0b^{n+1-0}$$
$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-k+1}$$

4. En déduire que
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}$$
Correction On applique la relation obtenue dans la question 2 (relation de Pascal) à ce qu'on vient de trouver.
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n-k+1}$$
Par ailleurs,
$$a^{n+1} = \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^{n-(n+1)+1}$$
et
$$b^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^0b^{n-0+1}$$
Ce sont donc les deux termes qui manquent à la somme de 0 à $(n+1)$. ON a ainsi
$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}$$
Ce qui prouve le résultat grace à la question 5

5. Conclure.
Correction On fait une récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\mathcal{P} :' \forall a, b \in \mathbb{C}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
L'initialisation a été faite à la question 3.
L'hérédité correspond à la question 6.

Exercice 2 (Application)**.** Soit $n, m \in \mathbb{N}^2$

1. Calculer $(1+x)^n(1+x)^m$ et $(1+x)^{n+m}$ à l'aide du binome de Newton.
2. En déduire que pour tout $r \leq n+m$ on a :
$$\sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j}\binom{m}{r-j} = \binom{n+m}{r}$$

Correction vu en cours. D'après le binome :
$$(1+x)^n(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} x^l$$
Et par ailleurs
$$(1+x)^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} x^j$$
Comme $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ on peut identifier les coefficients des deux polynomes. On obtient pour tout $r \in [\![0, n+m]\!]$
$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k,l,k+l=r} \binom{n}{k}\binom{m}{l}$$
et
$$\sum_{k,l,k+l=r} \binom{n}{k}\binom{m}{l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

II Suites usuelles

II. 1 Suite arithmétique

Définition 17. Définition d'une suite arithmétique :
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- Expression explicite : $u_n = u_0 + nr$
- Limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$
- Somme des termes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k =$

Remarque. Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_p si ....

On a alors $u_n =$ .... et $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k =$ ....

II. 2 Suite géométrique

Définition 19. Définition d'une suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique de raison q

$$u_{n+1} = qu_n$$

Proposition 20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Expression explicite : $u_n =$
- Limite (pour $u_0 > 0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$
- Somme des termes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

Remarque. Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_p si ....

On a alors $u_n =$ .... et $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k =$ ....

II. 3 Suite arithmético-géométrique

Définition 21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b ($a \neq 1$ et $b \neq 0$ sinon on est dans les deux cas précédents) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

- Recherche de la limite éventuelle en résolvant $al + b = l$.
- Étude de la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - l$.
  - ⋆ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
  - ⋆ En déduire son expression explicite.
- Expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + l$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Calculer u_n.

1. **Recherche de la limite éventuelle :**
2. **Étude de la suite auxiliaire $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**
3. **Expression explicite de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**
4. **Limite de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**

Exercice 22. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$. Donner son expression explicite, sa limite et la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Remarque. Les réels a et b ne doivent pas dépendre de n !

Exercice 23. Trouver le terme général des suites définies par $u_{n+1} = nu_n$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}u_n$, et $u_{n+1} = u_n^2$.

II. 4 Suite récurrente linéaire d'ordre deux

Définition 24. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$. On appelle suite récurrente linéaire d'ordre deux toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$(\mathcal{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} =$$

avec deux conditions initiales données (u_0 et u_1).

- Résolution de l'équation caractéristique associée à la suite :

$$(E) \quad x^2 - ax - b = 0.$$

- Expression explicite de la suite selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique :
  - ⋆ Si $\Delta > 0$: (E) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et l'expression explicite de la suite est :

    $$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

  - ⋆ Si $\Delta = 0$, (E) a une solution réelle double r_0, et l'expression explicite de la suite est :

    $$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- ⋆ Si $\Delta < 0$: (E) a deux solutions complexes conjuguées que l'on écrit sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$). L'expression explicite de la suite est alors :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- Calcul des constantes α et β à l'aide des valeurs des conditions initiales u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire.

Exemple. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.

Exercice 25. Étudier les suites définies par :
- $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
- $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

'

III Principales propriétés sur les suites

III. 1 Définitions, notations

Définition 26. Définition d'une suite :
- Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
- Pour désigner les valeurs prises par la suite, on note u_n à la place de $u(n)$.
- Pour désigner la suite globale, on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est la suite de terme général u_n.

Remarque. Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang.
Exemple : ....
Plus généralement, on note .... la suite de terme général u_n définie à partir du rang n_0.

⚠ Ne pas confondre ....

Représentation graphique d'une suite On peut représenter graphiquement une suite réelle en portant en abscisse les entiers naturels et en ordonnées les valeurs correspondantes de la suite. On obtient ainsi une succession de points qui décrivent l'évolution de la suite.

Exemple. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.

III. 2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 27. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si ....

Exercice 28. • La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée si ....

Exercice 29. 1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2+2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée par 0 et 1.

3. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}\dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par $\ln 2$. On pourra utiliser après l'avoir démontrée l'inégalité suivante : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

Cas particulier des suites définies explicitement $u_n = f(n)$ L'étude de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ permet d'obtenir les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 30. Majoration, minoration.

- Si la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
- Si la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée
- Si la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

III. 3 Suites croissantes, décroissantes, monotones

Définition 31. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si ....

⚠ Il existe plein de suites qui ne sont ....
Exemple : ....

III. 3. a Méthodes

❶ **Étude du signe de $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$:**

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 32. Étudier la monotonie des deux suites suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 - 2n$.

(b) La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

❷ Comparaison de $\mathbf{u_{n+1}/u_n}$ avec 1 si les termes de la suite sont strictement positifs :

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 33. Étudier la monotonie des deux suites suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$.

(b) La suite $(P_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 34.

- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3^{-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-1-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{1}{e}$.

Exercice 35. Soit f une définie sur $\mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dérfinie par $u_n = f(n)$. Montrer que

- Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Exercice 36. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-n}$.

III. 4 Convergence des suites

Ce théorème est vraiment très important, on l'utilise très souvent.

Théorème 37. Théorème sur les suites monotones

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers une limite finie
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle converge vers une limite finie
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$

Exercice 38. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+n}$. Montrer que la suite est bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1. Étudier sa monotonie, puis conclure sur sa convergence.

Exercice 39. Étudier l'éventuelle convergence des deux suites implicites étudiées au début de ce cours.

Théorème des gendarmes pour montrer une convergence et obtenir la valeur de la limite :

Théorème 40. Théorème des gendarmes :
Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $u_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Exemple. Étudier le comportement de la suite $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:

Correction On a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,|\sin(x)| \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

Exercice 41.
1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Étudier la convergence de cette suite.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

Définition 42. Définition de deux suites adjacentes :
Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'elles sont adjacentes si

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (ou inversement)
- $(u_n - v_n) \to 0$

Théorème 43. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes.
Alors les suites convergent et ont même limite.

Exercice 44. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Correction $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, elle est donc croissante.
Pour l'étude de la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculons $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{(n)(n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} & < 0
\end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Enfin
$$v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \to 0$$
Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème, elles convergent et ont même limite.

Théorème 45. Croissances comparées :
Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On a :

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n\gamma}}{n!} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{e^{n\gamma}} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

On peut retenir sous forme résumée qu'en $+\infty$:
$$(\ln n)^\alpha << n^\beta << e^{n\gamma} << n! << n^n.$$

IV Approfondissement

IV. 1 Récurrence forte

Ce type de raisonnement s'utilise quand on a une propriété $P(n)$ qui dépend de tous les $k \leq n$.

Exercice 46. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$

Exercice 47. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3$

IV. 2 Somme double

IV. 2. a Définition et notations

On souhaite calculer des sommes dont les termes dépendent de deux indices, par exemple : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_{i,j}$.

Exemples. Calculer les sommes doubles suivantes : $\displaystyle S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)$ et $\displaystyle S_2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} ij$.

Remarque. On pourra noter ces sommes doubles à l'aide d'un seul symbole $\sum$, en indiquant en dessous comment varient les deux indices. Par exemple, on a : $\displaystyle S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

et $S_2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} ij = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

De plus, il est toujours conseillé de représenter le domaine des indices pour lequel on effectue la somme.

IV. 2. b Méthode directe

Calcul de $\displaystyle\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_i \left[\sum_j a_{ij}\right]$:

- On calcule d'abord la somme la plus intérieure (ici celle d'indice j) qui dépond ou non de i
- On calcule la deuxième somme.

Exercice 48. Calculer les sommes suivantes $S_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} x^j$, $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2$ et $S_3 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$.

IV. 2. c Inversion des symboles sommes

Lorsque l'on n'arrive pas à calculer la somme la plus intérieure directement, on commence par inverser le sens des symboles somme. Il faut alors distinguer le cas d'indices liés ou non liés.

1. Indices non liés : les indices ne dépendent pas les uns des autres. On inverse sans précaution :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n'} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n'}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$$

2. Indices liés : les bornes d'un indice dépendent des autres. On fait très attention :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{ij} =$$

Car : $\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & i & \leq & n \\ 0 & \leq & j & \leq & i \end{array}\right. \iff$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} =$$

Car : $\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & i & \leq & n \\ i & \leq & j & \leq & n \end{array}\right. \iff$

Remarque. Dessiner le domaine des indices pour lequel on effectue la somme, ou représenter les positions relatives des indices sur un axe réel si l'échange d'indices liés vous paraît difficile.

Exemples. Calculer les sommes doubles suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x^j$.

Exercice 49. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k$. Donner alors une expression simple de cette somme en intervertissant l'ordre de sommation.