Correction DM3

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sqrt{e^x - 2}$$

Résoudre

$$f(x) \geq e^x - 4$$

Correction 1. f est bien définie pour tout x tel que $e^x - 2 \geq 0$ c'est à dire pour $e^x \geq 2$ soit $x \geq \ln(2)$

$$\boxed{D_f = [\ln(2), +\infty[}$$

On fait le changement de variable $e^x = X$, l'équaiton $f(x) \geq e^x - 4$ équivaut alors à

$$\sqrt{X - 2} \geq X - 4 \quad (E')$$

(E') est bien définie sur $[2, +\infty[$

On étudie alors le signe de $X - 4$

— Si $X - 4 \geq 0$, ie $X \in [4, +\infty[$.

$$\begin{aligned} E' &\Longleftrightarrow X - 2 \geq X^2 - 8X + 16 \\ &\Longleftrightarrow X^2 - 9X + 18 \leq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $X^2 - 9X + 18$ vaut $\Delta = 9^2 - 4 * 18 = 81 - 72 = 9 = 3^2$ On a donc deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{9+3}{2} = 6 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{9-3}{2} = 3$$

Donc $(E') \Longleftrightarrow (X - 6)(X - 3) \leq 0$ d'où les solutions sur $[4, +\infty[$:

$$\mathcal{S}_1 = [4, 6]$$

— Si $X - 4 < 0$, ie $X \in]-\infty, 4[$.

Alors comme $\sqrt{X - 2} \geq 0$ et $X - 4 < 0$, tous les réels de l'ensemble de définition sont solutions

$$\mathcal{S}_2 = [2, 4]$$

Ainsi les solutions de (E') sont

$$\mathbb{S}' = [2, 6]$$

On repasse à la variable x on a $e^x = X$ donc $x = \ln(X)$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) \geq e^x - 4 \text{ sont } \mathcal{S} = [\ln(2), \ln(6)]}$$

Exercice 2. Ecrire $(1+i)$ sous forme trigonométrique. En déduire la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\frac{1}{(1+i)^n}$$

en fonction de n.

Correction 2. Soit $z = 1+i$ On a $|z| = \sqrt{2}$ et donc

$$z = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

En résolvant $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on obtient $\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et donc

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Donc $z^n = (\sqrt{2}^n)e^{in\pi/4}$

Et finalement

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{\sqrt{2}^n}e^{-in\pi/4}$$

D'où

$$\boxed{Re(\tfrac{1}{(1+i)^n}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}^n}\cos(n\tfrac{\pi}{4}) \text{ et } Im(\tfrac{1}{(1+i)^n}) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}^n}\sin(n\tfrac{\pi}{4})}$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z et de paramétre $a \in \mathbb{R}$

$$z^2 + z + a = 0$$

Correction 3. On calcule le discriminant de $z^2 + z + a$. On obtient $\Delta = 1 - 4a$ Ainsi on distingue trois cas

— Cas 1 $\Delta > 0$ c'est à dire $a < \frac{1}{4}$
  Alors il y a deux solutions réelles :

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4a}}{2}$$

— Cas 2 $\Delta = 0$ c'est à dire $a = \frac{1}{4}$
  Alors il y a une solution réelle :

$$r = \frac{-1}{2}$$

— <u>Cas 3</u> $\Delta < 0$ c'est à dire $a > \frac{1}{4}$
Alors il y a deux solutions complexes :

$$r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{4a-1}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{4a-1}}{2}$$

Exercice 4. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Calculer
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\}$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on note $\alpha(z) = \frac{1}{z} + \overline{z}$.
   (a) Calculer le module de $\alpha(z)$ en fonction de celui de z.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x} + x \geq 2$.
   (c) En déduire
$$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\}$$

Correction 4.

1. Comme $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Donc
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z} + z\right| &= \left|e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right| \\ &= \left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$
Pour $\theta = \pi$ on a $\left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right| = 0$ donc
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\} = 0$$
2. (a)
$$\begin{aligned}|\alpha(z)| &= \left|\frac{1}{\overline{z}} + z\right| \\ &= \left|\frac{1 + z\overline{z}}{\overline{z}}\right| \\ &= \left|\frac{1 + |z|^2}{\overline{z}}\right| \\ &= \frac{|1 + |z|^2|}{|\overline{z}|} \\ &= \frac{1 + |z|^2}{|z|} \\ &= \frac{1}{|z|} + |z|\end{aligned}$$

(b) Pour tout $x > 0$ on a

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} - 2 &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$.

(c) On a $|\alpha(1)| = \frac{1}{|1|} + |1| = 2$ et on a vu que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|\alpha(z)| \geq 2$ donc

$$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\} = 2$$