

# DS 1

Durée 3h

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

**Exercice 1.** Résoudre pour  $x \in \mathbb{R}$  l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}. \quad (I)$$

Ecrire un script Python, qui demande à l'utilisateur un nombre flottant  $x$  et qui affiche True si  $x$  vérifie l'équation (I) et False sinon.

**Exercice 2.** On considère l'équation suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \quad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Dire si les réels suivants sont solutions ou non de (E)

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1, x_4 = 12$$

3. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , rappeler un encadrement de la partie entière de  $a$  en fonction de  $a$ .
4. Montrer que résoudre  $(E)$  est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} > 2x-1 & (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq 2x & (E_2) \end{cases}$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre  $(E)$ .

**Exercice 3.** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

1. Etudier la parité de  $f$ .
2. Donner les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$

**Exercice 4.** On considère les nombres réels  $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$  et  $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ . On rappelle que pour tout réel  $y$  on note  $\sqrt[3]{y}$  l'unique solution de l'équation  $x^3 = y$  d'inconnue  $x$ .

Le but de l'exercice est de donner des expressions simplifiées de  $\alpha$  et  $\beta$ .

1. Ecrire un script Python qui permet d'afficher une valeur approchée de  $\alpha$ .
2. (a) Calculer  $\alpha\beta$  et  $\alpha^3 + \beta^3$ .  
 (b) Vérifier que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .  
 (c) En déduire que  $(\alpha + \beta)^3 = 4 - 3(\alpha + \beta)$
3. On pose  $u = \alpha + \beta$  et on considère la fonction polynomiale  $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$ .  
 (a) A l'aide de la question précédente montrer que  $u$  est une racine de  $P$  c'est-à-dire que  $P(u) = 0$ .  
 (b) Trouver une autre racine « évidente » de  $P$ .  
 (c) Trouver trois nombres réels  $a, b,$  et  $c$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$   
 (d) Résoudre l'équation  $P(x) = 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .  
 (e) En déduire la valeur de  $u$ .
4. On considère la fonction polynomiale  $Q : x \mapsto Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$   
 (a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier  $Q(x)$  pour tout nombre réel  $x$ .  
 (b) En déduire des expressions plus simples de  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Correction 1.** L'équation (I) est définie pour tout  $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$  et pour tout  $x \in D$  on a :

$$\begin{aligned}
 (I) &\iff \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x+2} \leq 0 \\
 &\iff \frac{x+2 - x(x+1)}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \\
 &\iff \frac{-x^2 + 2}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \\
 &\iff \frac{x^2 - 2}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \\
 &\iff \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x+1)(x+2)} \geq 0
 \end{aligned}$$

On fait un tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$-2$	$-\sqrt{2}$	$-1$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x - \sqrt{2}$	-	-	-	-	0	+	
$x + \sqrt{2}$	-	-	0	+	+	+	
$x + 1$	-	-	-	-	+	+	
$x + 2$	-	+	+	+	+	+	
$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+1)(x+2)}$	+	-	0	+	-	0	+

Les solutions sont donc

$$S = ]-\infty, -2[ \cup ]-\sqrt{2}, -1[ \cup ]\sqrt{2}, +\infty[$$

```

1 x=float(input('Choisissez un reel x'))
2 if 1/(x+1) <= x/(x+2):
3     print(True)
4 else:
5     print(False)

```

**Correction 2.**

- Seule la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R}$  mais sur  $\mathbb{R}_+$  ainsi (E) est bien définie pour tout  $x$  tel que  $5x - 1 \geq 0$  c'est-à-dire

$$D_E = ]\frac{1}{5}, +\infty[$$

- Cours

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a - 1 < [a] \leq a$$

3. Notons  $f(x) = \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor$  On a  $f(\frac{1}{5}) = \lfloor 2\frac{1}{5} - \sqrt{5\frac{1}{5}-1} \rfloor = \lfloor 2\frac{1}{5} \rfloor = 0$  Donc

$$\boxed{\frac{1}{5} \text{ est solution de } E}$$

On a  $f(\frac{1}{2}) = \lfloor 2\frac{1}{2} - \sqrt{5\frac{1}{2}-1} \rfloor = \lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \rfloor$  Or  $\frac{3}{2} > 1$  donc  $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} = 1$  et donc  $1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$  ainsi

$$\boxed{\frac{1}{2} \text{ n'est pas solution de } E}$$

On a  $f(2) = \lfloor 2 \times 2 - \sqrt{10-1} \rfloor = \lfloor 4 - 3 \rfloor = \lfloor 1 \rfloor$

$$\boxed{2 \text{ n'est pas solution de } E}$$

On a  $f(12) = \lfloor 2 \times 12 - \sqrt{60-1} \rfloor = \lfloor 24 - \sqrt{59} \rfloor$  Or  $59 < 64 = 8^2$  donc  $\sqrt{59} < 8$  et  $24 - \sqrt{59} > 24 - 8 = 16$  ainsi  $f(2) > 16$  et

$$\boxed{12 \text{ n'est pas solution de } E}$$

4. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout  $x \in D_E$  on a :

$$2x - \sqrt{5x-1} - 1 < \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor \leq 2x - \sqrt{5x-1}$$

Si  $x$  est solution de  $(E)$  on a  $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0$  et donc l'équation  $(E)$  équivaut à  $2x - \sqrt{5x-1} - 1 < 0 \leq 2x - \sqrt{5x-1}$ , soit

$$\boxed{\begin{cases} \sqrt{5x-1} > 2x-1 & (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq 2x & (E_2) \end{cases}}$$

5. Résolvons ces deux inéquations. Tout d'abord la première :

$$\sqrt{5x-1} > 2x-1 \quad (E_1)$$

On distingue deux cas :

► Cas 1 :  $2x-1 \geq 0$  c'est-à-dire  $x \geq \frac{1}{2}$

Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff 5x-1 > (2x-1)^2 \\ &\iff 5x-1 > 4x^2-4x+1 \\ &\iff 4x^2-9x+2 < 0 \end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime :  $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 81 - 32 = 49 = 7^2$ .  $4x^2 - 9x + 2$  admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de  $(E_1)$  sur  $[\frac{1}{2}, +\infty[$  sont

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= ]\frac{1}{4}, 2[\cap[\frac{1}{2}, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{2}, 2[ \end{aligned}$$

Les solutions de  $(E_1)$  sur  $[\frac{1}{2}, +\infty[$  sont  $\mathcal{S}_1 = [\frac{1}{2}, 2[$

► Cas 2 :  $2x - 1 < 0$  c'est-à-dire  $x < \frac{1}{2}$

Dans ce cas, tous les réels  $x \in D_E$  sont solutions car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

Les solutions de  $(E_1)$  sur  $] - \infty, \frac{1}{2}[$  sont  $\mathcal{S}'_1 = ]-\infty, \frac{1}{2}[$

En conclusion :

Les solutions de  $(E_1)$  sur  $D_E$  sont  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}'_1 = ]-\infty, 2[$

On fait la même chose pour  $(E_2)$

$$\sqrt{5x - 1} \leq 2x \quad (E_2)$$

On distingue deux cas :

► Cas 1 :  $2x \geq 0$  c'est-à-dire  $x \geq 0$

Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x - 1 \leq (2x)^2 \\ &\iff 5x - 1 \leq 4x^2 \\ &\iff 4x^2 - 5x + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime :  $\Delta = 5^2 - 4 * 4 * 1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$ .  
 $4x^2 - 5x + 1$  admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{5 + 3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5 - 3}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de  $(E_2)$  sur  $[0, +\infty[$  sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (] - \infty, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [0, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[ \end{aligned}$$

Les solutions de  $(E_2)$  sur  $[0, +\infty[$  sont  $\mathcal{E}_2 = [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[$

► **Cas 2** :  $2x < 0$  c'est-à-dire  $x < 0$

Dans ce cas, aucun réel n'est solution car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

Les solutions de  $(E_2)$  sur  $] -\infty, 0[$  sont  $\mathcal{E}'_2 = \emptyset$

En conclusion :

Les solutions de  $(E_2)$  sur  $D_E$  sont  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}'_2 = [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[$

6.  $x$  est solution de  $(E)$  si et seulement si il est solution de  $(E_1)$  et  $(E_2)$ , l'ensemble des solutions correspond donc à l'intersection :  $\mathcal{E} \cap \mathcal{S} = ([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [\frac{1}{5}, 2[ = [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

Les solutions de  $(E)$  sont  $[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

### Correction 3.

1. La fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{e^{2x}} - 1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} \\ &= \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc impaire.

- 2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^{2x}(1 + e^{-2x})} \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \end{aligned}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$  donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$  donc

$\lim_{x \rightarrow -\infty} = -1$

3.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{2x}(e^{2x} + 1) - e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} \end{aligned}$$

Comme l'exponentielle est positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et on a le tableau suivant :

**Correction 4.**

1<sub>1</sub> print((2+5\*\*(1/2))\*\*(1/3))

2. (a)

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} \\ &= \sqrt[3]{4 - 5} \\ &= \sqrt[3]{-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha\beta = -1 \text{ et } \alpha^3 + \beta^3 = 4}$$

(b)

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

(c)

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ &= \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= 4 - 3\alpha\beta \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}P(u) &= P(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)^3 + 3\alpha\beta - 4 \\ &= 0 \quad \text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$

$$\boxed{u \text{ est racine de } P}$$

4. 1 est aussi racine de  $P$ , en effet :  $P(1) = 1 + 3 - 4 = 0$

$$\boxed{1 \text{ est racine de } P}$$

5. Développons  $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$  on obtient

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

En identifiant avec  $P$ , on a :  $a = 1, b - a = 0, c - b = 3, -c = -4$  c'est à dire

$$\boxed{a = 1, b = 1 \text{ et } c = 4}$$

6. D'après la question précédente  $P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$  Le discriminant de  $x^2 + x + 4$  est  $\Delta = 1 - 4 * 4 = -15 < 0$   $x^2 + x + 4 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $P(x) = 0$  admet pour unique solution

$$\boxed{S = \{1\}}$$

7. 1 est racine de  $P$ , c'est la seule. Comme  $u$  est aussi racine,

$$\boxed{u = 1}$$

8. (a) Développons  $Q$  :

$$\begin{aligned}Q(x) &= (x - \alpha)(x - \beta) \\ &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - x - 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, Q(x) = x^2 - x - 1}$$

(b) L'expression  $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$  montre que les racines de  $Q$  sont  $\alpha$  et  $\beta$ . D'autre part, on connaît une autre expression des racines de  $Q$  à l'aide du discriminant  $\Delta = 1 + 4 = 5$ , les racines de  $Q$  sont

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Remarquons que  $r_1 < r_2$  et on a  $\alpha < \beta$  donc

$$\boxed{\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$$