Correction TD 3 - Suites réelles usuelles

I Sommes et produits

I. 1 Factorielles

Correction 1.

- $A = \dfrac{7!}{6!} = \dfrac{7 \times 6!}{6!} = \boxed{7.}$
- $B = \dfrac{3 \times 4!}{(3!)^2} = \dfrac{3 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2} = \boxed{2.}$
- $C = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n.}$
- $D = \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!} = \dfrac{(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{(n-3)!} = \boxed{(n+1)n(n-1)(n-2).}$
- $E = \dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n(n^2 - 1 + 1) = \boxed{n^3.}$

I. 2 Calculs de sommes

Correction 2.

1. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$:**
   On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k} = (x^2)^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{cases}}$$

   Calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$:
   On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k+1} = (x^2)^k \times x$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k = \boxed{\begin{cases} x \times \dfrac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \\ -(n+1) & \text{si } x = -1. \end{cases}}$$

2. **Calcul de $\mathbf{\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}}$:**
On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $a^k 2^{3k} x^{-k} = a^k (2^3)^k \times \dfrac{1}{x^k} = a^k \times 8^k \times \left(\dfrac{1}{x}\right)^k = \left(\dfrac{8a}{x}\right)^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{8a}{x}\right)^k = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{8a}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{8a}{x}\right)} & \text{si } x \neq 8a \\ n+1 & \text{si } x = 8a. \end{cases}}$$

3. **Calcul de $\mathbf{\sum_{i=0}^{n} (i^2 + n + 3)}$:**
Par linéarité de la somme, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (i^2 + n + 3) &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+3) \sum_{i=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+3)(n+1) \\ &= \boxed{\frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 18\right)} \end{aligned}$$

4. **Calcul de $\mathbf{\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3}$:**
On commence par développer la puissance cube à l'intérieur de la somme puis on utilise la linéarité de la somme. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 &= \sum_{i=1}^{n} \left(8i^3 - 12i^2 + 6i - 1\right) \\ &= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 - 12\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1. \end{aligned}$$

On utilise ensuite le formulaire sur les sommes et on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 &= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= \boxed{n^2(4n^2 + 4n + 1)}. \end{aligned}$$

Une autre solution consiste à faire la somme des paires entre 1 et $2n$ puis simplifier l'expression avec la somme de tous les entiers au cube.

5. **Calcul de $\mathbf{\sum_{k=2}^{n^2} (1 - a^2)^{2k+1}}$:**
On commence par utiliser les propriétés sur les puissances et on obtient que : $(1-a^2)^{2k+1} = [(1-a^2)^2]^k \times (1-a^2)^1$. Par linéarité de la somme et en reconnaissant de plus la somme d'une suite géométrique, on a : $\sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2) \sum_{k=2}^{n^2} [(1-a^2)^2]^k$. On doit donc étudier deux cas selon que $(1-a^2)^2 \neq 1$ ou que $(1-a^2)^2 = 1$.

- Cas 1 : si $(1-a^2)^2 \neq 1$:
On obtient alors : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\times((1-a^2)^2)^2\times\frac{1-[(1-a^2)^2]^{n^2-1}}{1-(1-a^2)^2} = (1-a^2)^5\times\frac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{2a^2-a^4} = \boxed{(1-a^2)^5\times\frac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{a^2(2-a^2)}.}$
- Cas 2 : si $(1-a^2)^2 = 1$:
Regardons à quels a cela correctionrespond : $(1-a^2)^2 = 1 \Leftrightarrow 1-a^2 = 1$ ou $1-a^2 = -1 \Leftrightarrow a^2 = 0$ ou $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$ ou $a = 0$ ou $a = \sqrt{2}$. Calculons alors la somme pour ces a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\sum_{k=2}^{n^2}1 = (1-a^2)\times(n^2-1)$. Il faut alors distinguer encorrectione deux cas :
  - ⋆ Si $a=0$ alors $1-a^2=1$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = n^2-1.}$
  - ⋆ Si $a=-\sqrt{2}$ ou $a=\sqrt{2}$ alors $1-a^2=-1$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = -n^2+1.}$

6. **Calcul de $\displaystyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{3\times 2^k+1})$:**
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}2^k + \sum_{k=1}^{n}1 = 3\times 2\times\frac{1-2^n}{1-2}+n$ par linéarité et car $2\neq 1$. Donc
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1) = 6(2^n-1)+n.}$$

7. **Calcul de $\displaystyle\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n-1}}\exp\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\right)$:**
$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ car $e^{\frac{1}{n}}\neq 1$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.}$

8. **Calcul de $\displaystyle\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{2k-1+2^k})$:**
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k) = 2\sum_{k=0}^{n}k - \sum_{k=0}^{n}1 + \sum_{k=0}^{n}2^k = 2\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)+\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ par linéarité et car $2\neq 1$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k) = n^2+2^{n+1}-2.}$

9. **Calcul de $\displaystyle\sum_{\mathbf{j=0}}^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{j}}\mathbf{a^j}$:**
$\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j = (1+a)^n}$ en reconnaissant un binôme de Newton car $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j1^{n-j}$
Calcul de $\displaystyle\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n+1}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{j}}\mathbf{a^j}$:

On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant la relation de Chasles : $\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j - \binom{n}{0}a^0 + \binom{n}{n+1}a^{n+1}$. Par convention, on a : $\binom{n}{n+1} = 0$ et ainsi on obtient en utilisant le binôme de Newton : $\boxed{\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j = (1+a)^n - 1.}$

10. **Calcul de $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i$:**

$\boxed{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = 0}$ grâce au binôme de Newton car $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j 1^{n-j} = (1-1)^n$.

11. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i$:**

On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant la relation de Chasles : $\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(-1)^i - \binom{n+1}{0}(-1)^0 - \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1} = (1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} = -1 + (-1)^{n+2} = -1 + (-1)^n = (-1)^n - 1$. Ainsi on obtient que : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = (-1)^n - 1.}$

12. **Calcul de $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$:**

On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant les propriétés sur les puissances. On obtient $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}} = \frac{-1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{-1}{2}\right)^j = \frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{-1}{2^{n+1}}.}$

13. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$:**

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k}$. Afin de pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton, on utilise la relation de Chasles pour obtenir : $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \boxed{\frac{4^n-1}{3^n}.}$

Correction 3.

1. **Calcul de $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}$:**

On peut déjà remarquer que : $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = 0\times\binom{n}{0} + \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}$.

Ici on ne sait pas calculer la somme sans transformation car il y a le j. On utilise d'abord une propriété des coefficients binomiaux, et on obtient :

$$S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1} = n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}$$

car n est alors indépendant de l'indice de sommation donc on peut le sortir de la somme. Pour se ramener à du binôme de Newton, on commence par poser le changement de variable : $i = j-1$ et on obtient $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$ (c'est ici qu'il est mieux d'être passé au début d'une somme allant de 0 à n à une somme allant de 1 à n car sinon on aurait un indice commencant à -1. Si on n'a pas changé la somme au début, une autre méthode est alors de faire ici une relation de Chasles afin d'isoler l'indice -1). On reconnaît alors un binôme de Newton et on obtient $\boxed{S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}.}$

2. **Calcul de $\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{k(k-1)}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$:**

   Il s'agit ici d'appliquer deux fois de suite la propriété sur les coefficients binomiaux : $T = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}$ en reprenant les calculs faits au-dessus. On pourra aussi remarquer que la somme T peut être commencée à 2. Puis en réappliquant la propriété sur les coefficients binomiaux : $(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2}$, on obtient que : $T = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$. On effectue alors le changement de variable $j = k-2$ et on obtient $T = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}$. Donc en utilisant le binôme de Newton, on a : $\boxed{T = n(n-1)2^{n-2}.}$

   Calcul de $S_2 = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{k^2}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$:

   Comme $k^2 = k(k-1)+k$ et par linéarité de la somme, on obtient que : $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = T + S_1 = \boxed{n(n+1)2^{n-2}.}$

3. **Calcul de $\mathbf{S_3} = \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{i+1}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{i}}$:**

   Là encorrectione, il faut commencer par utiliser la propriété sur les coefficients binomiaux. Comme $(i+1)\binom{n+1}{i+1} = (n+1)\binom{n}{i}$, on obtient que : $\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$. Ainsi, la somme devient : $S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}$ car $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de l'indice de sommation i. On fait le changement d'indice $j = i+1$ et on utilise aussi la relation de Chasles pour faire apparaître le binôme de Newton. On obtient $S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0}\right]$. Ainsi, on obtient $\boxed{S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-1\right].}$

Correction 4.

1. Dès que l'on a une soustraction entre deux sommes de même type avec juste un décalage d'indice, il faut reconnaître une somme télescopique et savoir la calculer. Le calcul utilise un ou plusieurs changements d'indice puis la relation de Chasles.

   - **Calcul de $\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x_{i+1}} - \mathbf{x_i})$:**

$S=\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n}x_{i+1}-\sum_{i=0}^{n}x_i$ par linéarité. On pose alors le changement d'indice : $j=i+1$ dans la première somme et on obtient : $S=\sum_{j=1}^{n+1}x_j-\sum_{i=0}^{n}x_i$. Comme l'indice de sommation est muet, on a : $S=\sum_{i=1}^{n+1}x_i-\sum_{i=0}^{n}x_i$. La relation de Chasles donne : $S=\sum_{i=1}^{n}x_i+x_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}x_i-x_0=\boxed{x_{n+1}-x_0.}$

- **Calcul de $S'=\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x_{i+1}}-\mathbf{x_{i-1}})$:**

  $S'=\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}-\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}$ par linéarité. On pose alors le changement d'indice : $j=i+1$ dans la première somme et le changement $k=i-1$ dans la deuxième somme et on obtient : $S'=\sum_{j=2}^{n+1}x_j-\sum_{k=0}^{n-1}x_k$. Comme l'indice de sommation est muet, on a : $S'=\sum_{i=2}^{n+1}x_i-\sum_{i=0}^{n-1}x_i$. La relation de Chasles donne : $S'=\sum_{i=2}^{n-1}x_i+x_n+x_{n+1}-\sum_{i=2}^{n-1}x_i-x_0-x_1=\boxed{x_{n+1}+x_n-x_0-x_1.}$

2. **Calcul de $\mathbf{S}=\sum_{\mathbf{k=3}}^{\mathbf{n}}\ln\left[\frac{\mathbf{k^2}}{\mathbf{(k+1)(k-2)}}\right]$:**

   On transforme cette somme en utilisant les propriétés du logarithme népérien et on obtient : $\ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right)=2\ln(k)-\ln(k+1)-\ln(k-2)$.
   Ainsi transformée, la somme S est bien de type télescopique car on a bien une soustraction de 3 sommes de même type avec juste des décalages d'indice. En effet, par linéarité, on obtient : $S=2\sum_{k=3}^{n}\ln(k)-\sum_{k=3}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=3}^{n}\ln(k-2)$. On pose le changement d'indice $j=k+1$ dans la deuxième somme et le changement $i=k-2$ dans la troisième somme et on obtient

$$\begin{aligned}
S&=2\sum_{k=3}^{n}\ln(k)-\sum_{j=4}^{n+1}\ln(j)-\sum_{j=1}^{n-2}\ln(j)\\
&=2\ln(3)+2\ln(n-1)+2\ln(n)-\ln(n-1)-\ln(n)-\ln(n+1)-\ln(1)-\ln(2)-\ln(3)\\
&=\boxed{\ln\left(\frac{3n(n-1)}{2(n+1)}\right).}
\end{aligned}$$

Correction 5.

1. **Calcul de $\mathbf{S}=\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(k+1)(k+2)}}$:**

   - On commence par montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$: $\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k\in\mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(a+b)k+2a+b}{(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b &= 0 \\ 2a+b &= 1 \end{cases}$ donc $a=1$ et $b=-1$. Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$.

- Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j=k+1$ dans la première somme et le changement d'indice : $i=k+2$ dans la deuxième somme et on obtient : $S = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}}$ en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet et la relation de Chasles.

2. - On cherche à déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+3}$. On met sur le même dénominateur puis on identifie car la relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. On obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{k^2(a+b+c)+k(4a+3b+c)+3a}{k(k+1)(k+3)}$. Ainsi, par identification, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 4a+3b+c &= 1 \\ 3a &= -1 \end{cases}$. La résolution du système donne : $\boxed{a=-\frac{1}{3},\ b=1 \text{ et } c=-\frac{2}{3}.}$
   - En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$. On obtient donc par linéarité : $S = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3}$. On pose les changements de variable suivant : $j=k+1$ et $i=k+3$ et on obtient : $S = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \frac{2}{3}\sum_{i=4}^{n+3} \frac{1}{i} = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k}$ car l'indice de sommation est muet. D'après la relation de Chasles, on obtient : $S = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \boxed{\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}\right).}$

3. **Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$:**

$\star$ Méthode 1 : calcul direct.

- On commence par montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 3a+2b+c &= 0 \\ 2a &= 1 \end{cases}$ donc $a=c=\frac{1}{2}$ et $b=-1$. Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$.

- Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j = k+1$ dans la deuxième somme et le changement d'indice : $i = k+2$ dans la troisième somme et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) = \boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet, la relation de Chasles et en mettant tout au même dénominateur.

⋆ Méthode 2 : par récurrence.

- On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

- Initialisation : pour $n = 1$:
  - ⋆ D'un côté, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$.
  - ⋆ De l'autre côté, on a : $\displaystyle\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4\times 6} = \frac{1}{6}$.

  Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ d'après la relation de Chasles.
  Puis par hypothèse de récurrence, on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(}$
  $\displaystyle\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$ en mettant au même dénominateur. Pour le numérateur on remarque que -1 est racine évidente et ainsi en factorisant par $n+1$ on obtient par identification des coefficients que : $n^3+6n^2+9n+4 = (n+1)(n^2+5n+4)$. Puis le calcul du discriminant donne que $n^3+6n^2+9n+4 = (n+1)(n^2+5n+4) = (n+1)(n+1)(n+4)$. Ainsi on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Correction 6.

1. **Calcul de $\mathbf{S_1} = \displaystyle\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \frac{\cos(\mathbf{kx})}{\cos^{\mathbf{k}}\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \not\equiv \dfrac{\pi}{\mathbf{2}}[\pi]$:**

   Déjà la somme est bien définie (le cosinus est bien non nul) par hypothèse sur x. On introduit $S_1' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k x}$ et on reconnaît la somme d'une suite géométrique :

$$S_1 + iS_1' = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k.$$

On doit distinguer deux cas selon que $\dfrac{e^{ix}}{\cos x}$ vaut 1 ou pas..

- Si $\dfrac{e^{ix}}{\cos x} = 1$.
  Ce cas là correctionrespond, en repassant par la définition de $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ à $\sin x = 0$. En effet, on a : $\dfrac{e^{ix}}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{e^{ix}}{\cos x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\cos(x) + i\sin(x) - \cos(x)}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$. Ainsi, si il existe $k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$, alors la raison est 1. On obtient alors : $S_1 + iS_1' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Ainsi, dans ce cas particulier, par identification des parties réelle et imaginaire, on a : $\boxed{S_1 = n+1 \text{ et } S_1' = 0.}$

- Si $\dfrac{e^{ix}}{\cos x} \neq 1$, c'est-à-dire si $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$:
  On obtient alors en appliquant la formule sur la somme de suite géométrique :

$$\begin{aligned}
S_1 + iS_1' &= \frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos^{n+1}(x) - e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{\frac{\cos x - e^{ix}}{\cos x}} \\
&= \frac{1}{\cos^n(x)} \times \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{\cos x - \cos x - i\sin x} \\
&= \frac{1}{\cos^n(x)} \times \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{-i\sin x} \\
&= \frac{i}{\cos^n(x)} \times \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{\sin x} \\
&= \frac{1}{\cos^n(x)} \times \frac{i\left(\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)\right) + \sin((n+1)x)}{\sin x}
\end{aligned}$$

  Ainsi, on obtient par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\boxed{S_1 = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)\cos^n(x)} \quad \text{et} \quad S_1' = \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\sin(x)\cos^n(x)}.}$$

2. **Calcul de $\mathbf{S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(kx)}$, $\mathbf{S_2' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(kx)}$:**

- **Calcul de $\mathbf{S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(kx)}$:**
  En utilisant la formule de duplication du cosinus (ce qui revient à linéariser $\sin^2(kx)$), on obtient

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \cos(2kx)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(2kx)}{2} \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx).
\end{aligned}$$

  Afin de calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx)$, on calcule, comme dans le cours, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (e^{2ix})^k$ et on prendra la partie réelle.
  Deux cas sont à étudier selon que la raison vaut 1 ou pas.

* $\star$ Si $e^{2ix} = 1 \Leftrightarrow 2x \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$:
On obtient alors pour le calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(e^{2ix})^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2kx) = n$. En remettant dans S_2, on obtient $\boxed{S_2 = 0.}$
* $\star$ Si : $\forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\pi$
On obtient pour le calcul de la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^{2ix})^k = \frac{1-e^{2ixn}}{1-e^{2ix}} = \frac{e^{ixn}\left(e^{-ixn}-e^{ixn}\right)}{e^{ix}\left(e^{-ix}-e^{ix}\right)} = e^{ix(n-1)}\frac{\sin(nx)}{\sin x}.$$

Ainsi en prenant la partie réelle, on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2kx) = \frac{\sin(nx)}{\sin x}\cos((n-1)x)$. En remettant dans la somme S_2, on obtient

$$\boxed{S_2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin(nx)}{\sin x}\cos((n-1)x).}$$

* **Calcul de $\mathbf{S_2'} = \displaystyle\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n-1}}\cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{kx})$:**
En utilisant la formule de duplication du cosinus (ce qui revient à linéariser $\cos^2(kx)$), on obtient

$$\begin{aligned} S_2' &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1+\cos(2kx)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(2kx)}{2} \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2kx). \end{aligned}$$

Afin de calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2kx)$, on calcule, comme dans le cours, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(e^{2ix})^k$ et on prendra la partie réelle. Deux cas sont à étudier selon que la raison vaut 1 ou pas.
  * $\star$ Si $e^{2ix} = 1 \Leftrightarrow 2x \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$:
  On obtient alors pour le calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(e^{2ix})^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2kx) = n$. En remettant dans S_2', on obtient $\boxed{S_2' = n.}$
  * $\star$ Si : $\forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\pi$
  On obtient pour le calcul de la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^{2ix})^k = \frac{1-e^{2ixn}}{1-e^{2ix}} = \frac{e^{ixn}\left(e^{-ixn}-e^{ixn}\right)}{e^{ix}\left(e^{-ix}-e^{ix}\right)} = e^{ix(n-1)}\frac{\sin(nx)}{\sin x}.$$

  Ainsi en prenant la partie réelle, on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2kx) = \frac{\sin(nx)}{\sin x}\cos((n-1)x)$. En remettant dans la somme S_2, on obtient

$$\boxed{S_2' = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(nx)}{\sin x}\cos((n-1)x).}$$

3. **Calcul de $\mathbf{S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx)}$:**

Comme toujours avec les sommes trigonométriques, on calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\cos(a+kx)+i\sin(a+kx)\right]=\sum_{k=0}^{n}e^{ia+ikx}=\sum_{k=0}^{n}e^{ia}e^{ikx}=e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k$ en utilisant le fait que e^{ia} ne dépend pas de l'indice de sommation k et on peut donc le sortir de la somme. Afin de pouvoir utiliser la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique, on doit distinguer deux cas :

- Cas 1 : si $e^{ix}=1 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi$:
  On obtient alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\cos(a+kx)+i\sin(a+kx)\right]=e^{ia}\sum_{k=0}^{n}1=(n+1)e^{ia}$. En prenant la partie réelle, on obtient que : $\boxed{S_3=(n+1)\cos(a).}$
- Cas 2 : si $x\neq 2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$:
  Comme $e^{ix}\neq 1$, on obtient alors
  $$\sum_{k=0}^{n}\left[\cos(a+kx)+i\sin(a+kx)\right]=e^{ia}\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}=e^{ia}\frac{1-(e^{ix(n+1)})}{1-e^{ix}}.$$
  On utilise alors la méthode de l'angle moitié pour obtenir ensuite la partie réelle. On obtient
  $$\sum_{k=0}^{n}\left[\cos(a+kx)+i\sin(a+kx)\right]=e^{ia}e^{\frac{inx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{i(a+\frac{nx}{2})}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
  Ainsi, en prenant la partie réelle, on obtient
  $$\boxed{S_3=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(a+\frac{nx}{2}\right).}$$

4. **Calcul de $\mathbf{S_4 = \sum_{k=0}^{n} \cos^3(kx)}$:**

Dans ces cas là, on commence par linéariser :

- On linéarise $\cos^3(kx)$ et on obtient que : $\cos^3(kx)=\dfrac{1}{4}\left(\cos(3kx)+3\cos(kx)\right)$
- Par linéarité de la somme, on obtient donc
  $$S_4=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\cos(3kx)+3\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)\right).$$
  On calcule chacune de ces sommes séparément. Pour cela, on utilise la méthode du cours.
  - ⋆ Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$: on calcule $\displaystyle S=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)+i\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.
    $\displaystyle S=\sum_{k=0}^{n}e^{ix}=n+1$ si $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{ix}=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=e^{\frac{ixn}{2}}\frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ sinon.
    On prend ensuite la partie réelle pour obtenir la somme voulue.
  - ⋆ Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(3kx)$: on remplace x par $3x$ dans le calcul précédent :
    $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{3ix}=n+1$ si $x=\dfrac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{3ix}=e^{\frac{3ixn}{2}}\frac{\sin\left(\frac{3x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}$ sinon.
    On prend ensuite la partie réelle.

On a donc 3 cas à étudier et on obtient

- ⋆ Si $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors $3x$ est aussi de la forme $2k'\pi$ et ainsi, on obtient : $\boxed{S_4 = n+1.}$
- ⋆ Si $x = \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ mais x n'est pas de la forme $2k'\pi$, alors

$$\boxed{S_4 = \frac{1}{4}\left[n+1+3\cos\left(\frac{xn}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right].}$$

- ⋆ Si x n'est pas de la forme $\dfrac{2k\pi}{3}$ alors il n'est pas non plus de la forme $2k'\pi$ et on obtient

$$\boxed{S_4 = \frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{3xn}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{3x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)} + 3\cos\left(\frac{xn}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right].}$$

5. **Calcul de $\mathbf{S_5 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)}$:**

On pose $S_5' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$ et on reconnaît le binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
S_5' + iS_5 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\cos(kx)+i\sin(kx)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k 1^{n-k} = (1+e^{ix})^n\\
&= \left(e^{i\frac{x}{2}}\left[e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}\right]\right)^n = e^{i\frac{nx}{2}}\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant la partie réelle et imaginaire de ce résultat, on trouve S_5' et S_5 :

$$\boxed{S_5' = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \quad S_5 = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right).}$$

6. **Calcul de $\mathbf{S_6 = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(2k)}{3^k}}$:**

Comme toujours avec les sommes trigonométriques, on introduit $S_6' = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{\sin(2k)}{3^k}$ et on calcule $S = S_6 + iS_6' = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{e^{2ik}}{3^k}$. On obtient que $S = \sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{e^{2i}}{3}\right)^k$. On reconnaît alors la somme d'une suite géométrique de raison $\dfrac{e^{2i}}{3} \neq 1$ et on obtient donc que :

$$S = \frac{1-\left(\frac{e^{2i}}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{2i}}{3}} = \frac{\frac{3^{n+1}-e^{2i(n+1)}}{3^{n+1}}}{\frac{3-e^{2i}}{3}} = \frac{3^{n+1}-e^{2i(n+1)}}{3-e^{2i}} \times \frac{1}{3^n}.$$

Ici la difficulté est que l'on ne peut pas utiliser l'angle moitié. Il faut donc faire apparaître la partie réelle en multipliant par le conjugué du dénominateur. Cela donne des calculs un peu longs mais pas durs. On obtient donc en utilisant le fait que $e^{2i} = \cos(2) + i\sin(2)$:

$$S = \frac{1}{3^n} \times \frac{\left[3^{n+1} - \cos(2(n+1)) - i\sin(2(n+1))\right] \times \left[3 - \cos(2) - i\sin(2)\right]}{(3-\cos(2))^2 + \sin^2(2)}.$$

Il s'agit ensuite de développer le numérateur et de ne prendre que la partie réelle. Cela donne $S_6 = \dfrac{1}{3^n} \times \dfrac{3^{n+2} - 3^{n+1}\cos(2) - 3\cos(2n+2) + \cos(2n+2)\cos(2) - \sin(2n+2)\sin(2)}{(3-\cos(2))^2 + \sin^2(2)}$. Ainsi en utilisant une formule de trigonométrie, on obtient que :

$$\boxed{S_6 = \frac{1}{3^n} \times \frac{3^{n+2} - 3^{n+1}\cos(2) - 3\cos(2n+2) + \cos(2n+4)}{(3-\cos(2))^2 + \sin^2(2)}.}$$

7. **Calcul de $\mathbf{S_7 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(y+kx)}$:**

   Comme toujours avec les sommes trigonométriques, on introduit $S_7' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(y+kx)$ et on calcule $S = S_7 + iS_7' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{iy+ikx}$. On obtient :

   $$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{iy} e^{ikx} = e^{iy} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k = e^{iy}\left(1+e^{ix}\right)^n.$$

   On utilise ensuite la méthode de l'angle moitié pour conclure. En effet, on a : $S = e^{iy} \times e^{i\frac{nx}{2}} \times 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i(y+\frac{nx}{2})}$. Par identification de la partie réelle, on obtient que

   $$\boxed{S_7 = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(y+\frac{nx}{2}\right).}$$

8. **Calcul de $\mathbf{S_8 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^2(kx)}$:**

   - On commence par linéariser le cosinus (ou, ce qui revient au même utiliser la formule de duplication des angles pour le cosinus). On obtient que : $\cos^2(kx) = \dfrac{1+\cos(2kx)}{2}$. Ainsi par linéarité de la somme, on doit calculer : $S_8 = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2kx) = \dfrac{2^n}{2} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2kx) = 2^{n-1} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2kx)$ en utilisant la formule du binôme de Newton pour la première somme.
   - Calculons alors $A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2kx)$:

     On introduit pour cela $B = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(2kx)$ et on calcule usuellement $S = A + iB = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{2ikx}$. On obtient que : $S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{2ix})^k = (1+e^{2ix})^n$ en utilisant le binôme de Newton. On utilise alors la méthode de l'angle moitié et on obtient que : $S = e^{inx} \times 2^n \cos^n(x)$. Ainsi par identification de la partie réelle, on a : $A = 2^n \cos^n(x)\cos(nx)$.
   - On peut donc calculer S_8 et on obtient que :

     $$\boxed{S_8 = 2^{n-1} + 2^{n-1}\cos^n(x)\cos(nx) = 2^{n-1}\left(1+\cos^n(x)\cos(nx)\right).}$$

Correction 7. La dérivation d'une somme finie est une méthode très classique qui permet d'obtenir plein de nouvelles sommes. Il s'agit juste d'utiliser le fait que $(f+g)' = f' + g'$ et ainsi la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

1. D'après le binôme de Newton, on sait que : $\boxed{f(x) = (1+x)^n.}$
2. La fonction f est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. La fonction f est définie par deux expressions différentes que l'on peut dériver :
   - D'un côté, la fonction f vaut : $f(x) = (1+x)^n$. Ainsi, en dérivant, on obtient que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1}.}$$
   - De l'autre côté, la fonction f vaut $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \cdots + nx^{n-1} + x^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
   La dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on obtient que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}}$$
   car le premier terme pour $k=0$ est constant donc sa dérivée est nulle.

   On obtient donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.}$
3. Il s'agit de remarquer que $S = g(1) = f'(1)$ et ainsi, on obtient que : $\boxed{S = n2^{n-1}.}$ On retrouve bien le même résultat.

Correction 8. Il s'agit ici du même type de méthode que pour l'exercice précédent sauf que cette fois ci, on l'applique à la somme des termes d'une suite géométrique et plus au binôme de Newton.

1. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et ainsi, on obtient, comme $x \neq 1$:
$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.}$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme produit, somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables.
   - D'un côté, la fonction f vaut : $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Ainsi, en dérivant, on obtient que :
   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f'(x) = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$
   - De l'autre côté, la fonction f vaut $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$. La dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on obtient que :
   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.}$
   ⚠ La somme commence bien à $k=1$ car le terme pour $k=0$ dans $f(x)$ est le terme constant 1 qui est nul lorsqu'on dérive.

   On obtient donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$

   On a : $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx \times x^{k-1} = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. D'après la question précédente, on obtient donc :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^k = x \times \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$$

3. Il faut ici remarquer que la somme correctionrespond à dériver deux fois la somme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} x^k$. La fonction f est bien deux fois dérivables comme fonction polynomiale. Et en dérivant deux fois, on obtient bien : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$. Cette somme commence bien à $k = 2$ car quand on dérive deux fois les termes 1 et x, ils deviennent nuls. En dérivant deux fois l'autre expression de f, on obtient la valeur de la somme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}.}$$

Correction 9.

1. - **Calcul de $\mathbf{S_n + T_n}$:**
   Si on ne voit pas comment débuter, on commence par écrire la somme $S_n + T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n + T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux : S_n correctionrespond en effet à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k pair et T_n correctionrespond à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k impair donc en sommant les deux on a bien la somme de tous les coefficients binomiaux pour k allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de Newton, on obtient que : $\boxed{S_n + T_n = 2^{2n} = 4^n.}$
   - **Calcul de $\mathbf{S_n - T_n}$:**
   De même, on peut commencer par écrire la somme $S_n - T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n - T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux coefficientés par 1 ou par -1 : les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k pair sont coefficienté par 1 et les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k impair sont coefficienté par -1. Ainsi cela revient bien à sommer tous les nombres $\binom{2n}{k}(-1)^k$ pour k allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de Newton, on obtient que : $\boxed{S_n + T_n = (1-1)^n = 0.}$

2. Il s'agit alors juste de résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} S_n + T_n & = & 2^{2n} \\ S_n - T_n & = & 0. \end{array}\right.$. On obtient alors : $2S_n = 2^{2n}$ donc $S_n = 2^{2n-1}$ et $T_n = S_n = 2^{2n-1}$.

I. 3 Calculs de produits

Correction 10.

1. **Calcul de $\mathbf{\prod_{k=1}^{n} k}$** $= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n = \boxed{n!}$

Calcul de $\displaystyle\prod_{\mathbf{k=i}}^{\mathbf{i+n}} \mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=i}^{i+n} k &= i\times(i+1)\times(i+2)\times\cdots\times(i+n)\\ &= \frac{[1\times2\times3\times\cdots\times(i-1)]\times[i\times(i+1)\times(i+2)\times\cdots\times(i+n)]}{[1\times2\times3\times\cdots\times(i-1)]}\\ &= \frac{1\times2\times3\times\cdots\times(i-1)\times i\times(i+1)\times(i+2)\times\cdots\times(i+n)}{1\times2\times3\times\cdots\times(i-1)} = \boxed{\frac{(i+n)!}{(i-1)!}}.\end{aligned}$$

2. **Calcul de $\displaystyle\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \exp\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\right)$:**

$$\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}\times e^{\frac{2}{n}}\times e^{\frac{3}{n}}\times\dots e^{\frac{n-1}{n}}\times e^{\frac{n}{n}} = e^{\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}{n}} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}k} = \boxed{e^{\frac{n+1}{2}}.}$$

3. **Calcul de $\displaystyle\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{2k}}{\mathbf{2k+1}}$** :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} &= \frac{2n\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times3\times1} = \frac{(2n\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2)^2}{(2n+1)\times2n\times\ldots\times3\times2\times1}\\ &= \frac{(2^n n\times(n-1)\times\ldots\times2\times1))^2}{(2n+1)!} = \boxed{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}\end{aligned}$$

4. **Calcul de $\displaystyle\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{4k-2})$** :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(4k-2) &= \prod_{k=1}^{n}2(2k-1) = 2^n\times(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1\\ &= \frac{2^n\times2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times3\times2\times1}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2} = \frac{2^n\times(2n)!}{2^n\times n\times(n-1)\times\ldots\times2\times1} = \boxed{\frac{(2n)!}{n!}}\end{aligned}$$

5. **Calcul de $\displaystyle\prod_{\mathbf{k=2}}^{\mathbf{n}} \left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k^2}}\right)$:**

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k^2-1)}{\prod\limits_{k=2}^{n}k^2} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod\limits_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}k}{\prod\limits_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod\limits_{k=3}^{n+1}k}{\prod\limits_{k=2}^{n}k} = \boxed{\frac{n+1}{2n}.}$$

6. **Calcul de $\displaystyle\prod_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{p-1}} \frac{\mathbf{n-k}}{\mathbf{p-k}}$:**

$$\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{p-1}(n-k)}{\prod\limits_{k=0}^{p-1}(p-k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\times\cdots\times2\times1} = \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{p!}.$$

On essaye alors d'écrire le numérateur avec des factorielles. On obtient : $n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1) = \dfrac{[n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)]\times[(n-p)\times\cdots\times 2\times 1]}{(n-p)\times\cdots\times 2\times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Ainsi on obtient au final que : $\prod_{k=0}^{p-1}\dfrac{n-k}{p-k} = \boxed{\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dbinom{n}{p}.}$

Correction 11. On cherche à calculer $S = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{2}\right)$. D'après les propriétés du logarithme népérien, on a :

$$S = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{2}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}k}{\prod_{k=1}^{n}2}\right) = \ln\left(\frac{n!}{2^n}\right).$$

Ainsi on obtient que : $\boxed{S = \ln\left(\frac{n!}{2^n}\right).}$

II Suites usuelles

Correction 12.

1.
   - C'est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = 2+3n.$$
   - Elle diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2(n+1) + 3\sum_{k=0}^{n}k = 2(n+1) + 3\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2.
   - C'est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = 2+\frac{n}{2}.$$
   - Elle diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2(n+1) + \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}k = 2(n+1) + \dfrac{n(n+1)}{4}$.
3.
   - C'est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = 2-5n.$$
   - Elle diverge vers $-\infty$.
   - $S = 2(n+1) - 5\sum_{k=0}^{n}k = 2(n+1) - 5\dfrac{n(n+1)}{2}$.
4.
   - C'est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = 23^n.$$
   - Comme $3>1$, la suite diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2\sum_{k=0}^{n}3^k = 3^{n+1}-1$.

5. • C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

• Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la suite converge vers 0.

• $S = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

6. • C'est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2(-5)^n.$$

• Comme $-5 < -1$, la suite n'admet pas de limite, elle est divergente de deuxième espèce.

• $S = 2\sum_{k=0}^{n}(-5)^k = \frac{1}{3}\left(1 - (-5)^{n+1}\right)$.

7. • C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{7}{2} \times 3^n - \frac{3}{2}$.

• Comme $3 > 1$, elle diverge vers $+\infty$.

• $S = \frac{7}{4}\left(3^{n+1} - 1\right) - \frac{3(n+1)}{2}$.

8. • C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{16}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{9}$.

• Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, elle converge vers $\frac{2}{9}$.

• $S = \frac{32}{27}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{2(n+1)}{9}$.

9. • C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4(-1)^n - 2$.

• Elle n'admet pas de limite, elle est divergente de deuxième espèce.

• $S = 2\left(1 - (-1)^{n+1}\right) - 2(n+1)$.

Correction 13.

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   - On montre par récurrence sur $n \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad u_n$ défini et $u_n > 1$.
   - Initialisation : pour $n = 3$:
     On a : $u_1 = -1$ puis $u_2 = -7$ et $u_3 = \frac{37}{5} > 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a

     $$u_{n+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} > 1 \Leftrightarrow 5u_n - 2 > u_n + 2 \Leftrightarrow u_n > 1.$$

     Ici on a utilisé le fait que $u_n > 1$ d'après $\mathcal{P}(n)$, et donc que $u_n + 2 > 0$. On arrive $u_n > 1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1} > 1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n \geq 3, \ u_n > 1$.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0,\ u_1,\ u_2$ ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n \geq 3, u_n > 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n - 1 \neq 0$ et v_n bien défini.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{5u_n-2-2u_n-4}{u_n+2}}{\frac{5u_n-2-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{3u_n-6}{4u_n-4} = \frac{3}{4}\frac{u_n-2}{u_n-1} = \frac{3}{4}v_n.$$
Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 2.
4. On en déduit la formule explicite de v_n :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$
En remarquant que : $u_n(v_n-1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1} \Rightarrow u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n-2}{2(\frac{3}{4})^n-1}.$$
5. Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = 2$.

Correction 14. Toutes ces suites sont des suites linéaires récurrentes d'ordre deux, on les résout en étudiant l'équation caractéristique. Je ne donne ici que le résultat.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4}\left(3^{n+1}+(-1)^n\right)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-n)2^n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(2-\frac{5}{4}n\right)(-4)^n$
4. Suite de Fibonacci, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$

Correction 15. Pour toutes ces suites, on conjecture le résultat en itérant la relation de récurrence puis on le démontre rigoureusement par récurrence. Je ne fais pas ici la récurrence mais elle doit être présente dans toute copie. Je ne donne ici que le résultat, à savoir u_n en fonction de n.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}nu_1 = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}n.$
2. Méthode 1 : on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\times 2^3 \times 2^{3^2} \times \cdots \times 2^{3^{n-1}} u_0^{3^n} = 2^{\sum\limits_{k=0}^{n} 3^k} = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$ et on fait une récurrence.
Méthode 2 : on pose $u_n = 2^{v_n}$, et on essaye de calculer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $u_0 = 2 = 2^1$, donc $v_0 = 1$. De plus, on a :
$$u_{n+1} = 2(u_n)^3 \ \Leftrightarrow\ 2^{v_{n+1}} = 2\times(2^{v_n})^3 \ \Leftrightarrow\ 2^{v_{n+1}} = 2^{3v_n+1} \ \Leftrightarrow\ v_{n+1} = 3v_n+1.$$
On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. La méthode habituelle donne ensuite $v_n = \frac{3}{2}\times\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$, soit $u_n = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$.

III Monotonie et convergence

Correction 16. Étude de la monotonie des suites suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}-(n+1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+n=\frac{1}{2^{n+1}}-1.$$
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2^{n+1}}<1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plutôt de type produit. Comme tous ses termes sont strictement positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. On obtient
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}\times\frac{2^{n+1}}{n!}=\frac{n+1}{2}.$$
Un calcul rapide donne
$$\frac{n+1}{2}<1\Leftrightarrow n+1<2\Leftrightarrow n<1.$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante ou encorrectione la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite définie explicitement et $u_n=f(n)$ avec
$$f:\ x\mapsto f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$
L'étude de la monotonie de la fonction f sur $[1,+\infty[$ permet d'en déduire directement la monotonie de la suite.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. On obtient
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$
Étudions le signe de $1-\ln x$ ($x^2\geq 0$ donc le signe de la dérivée est bien le signe de $1-\ln x$) :
$1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$ car la fonction exponentielle est strictement croissante. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Ainsi, à partir du rang 3, la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\sum_{k=0}^{2(n+1)}\frac{(-1)^k}{k+1}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k+1}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k+1}\\&=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+2}\\&=\frac{-1}{(2n+3)(2n+2)}.\end{aligned}$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. On remarque que
$$u_{n+1}-u_n=n+1+2(-1)^{n+1}-n-2(-1)^n=1+2(-1)^{n+1}+2(-1)^{n+1}=1+4(-1)^{n+1}.$$
Ainsi, si $n=2p$ pair, on obtient : $u_{2p+1}-u_{2p}=5>0$ et si $n=2p+1$ impair, on obtient : $u_{2p+2}-u_{2p+1}=-3<0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k\ln k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}>0.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction 17. Je ne donne ici que les réponses et quelques indications pour trouver les limites demandées. Une telle rédaction dans une copie serait très insuffisante.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}=+\infty$ par composée et produit de limite car $\cos(0)=1$.
2. On a ici une forme indéterminée avec une différence de racines. L'idée est d'utiliser la quantitée conjuguée :
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$
Par quotient de limites, on obtient donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)-\ln(n^2)=-\infty$ en utilisant $\ln\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$ et le théorème des monômes de plus haut degré.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=e^2$ en utilisant le fait que $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{2}{n}$ (limite très classique fait en cours).
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+n}{2^n}=1$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme dominant, à savoir 2^n et en utilisant une croissance comparée car $2^n=e^{n\ln 2}$.
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}=1$ en mettant en facteur en haut et en bas n et en remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$ par le théorème des gendarmes et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n^3)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\ln(n)}{n}=0$ par croissance comparée.
7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}$ en écrivant que $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et d'après le théorème sur les monômes de plus haut degré.
8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-4^n}{3^n+4^n}=-1$ en mettant en facteur en haut et en bas 4^n le terme dominant et appliquant le théorème sur les suites géométriques.
9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ en utilisant un correctionollaire du théorème des gendarmes car $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\leq\dfrac{1}{n}$ ou le théorème des gendarmes.
10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$ en utilisant le théorème des gendarmes car : $0\leq\dfrac{1+(-1)^n}{n}\leq\dfrac{2}{n}$.
11. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2-n\cos n+2=+\infty$ en mettant en facteur le terme dominant n^2 et en utilisant le correctionollaire du théorème des gendarmes avec $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right|\leq\dfrac{1}{n}$.
12. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=0$ en utilisant la définition des factorielles.
13. $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(2^n+n)=+\infty$ par propriété sur les somme et composée de limites.
14. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$ car $n^{1/n}=e^{1/n\ln n}$ puis par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$.
15. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n)^n=+\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée ici, il suffit d'écrire que $(\ln n)^n=e^{n\ln(\ln n)}$.

16. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+2^n}{3^n} = 0$ en mettant 2^n en facteur au numérateur et en utilisant ensuite le théorème sur la convergence des suites géométriques et les croissances comparées car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{e^{n\ln 2}} = 0$.

17. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$ en transformant l'expression en mettant le terme dominant n^2 en facteur :

$$(n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{1/n \ln(n^2+n+1)}.$$

Le terme en exposant dans l'exponentielle est alors

$$\frac{\ln(n^2+n+1)}{n} = \frac{\ln(n^2)}{n} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n}.$$

On obtient alors la limite voulue en utilisant les croissances comparées.

18. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b^k$.

On suppose ici que $a > 0$ et $b > 0$. Commençons par calculer l'expression dont on cherche la limite. On obtient, si $b \neq 1$

$$\frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k = \frac{b}{1-b}\frac{1-b^n}{a^n}.$$

Et si $b = 1$, on obtient $\dfrac{1}{a^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b^k = \dfrac{n}{a^n}$. Etudions alors des cas :

- ⋆ Si $b > 1$:
  On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-b}{1-b}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ car $1-b^n \underset{+\infty}{\sim} -b^n$ et en utilisant ensuite les propriétés sur le produit et le quotient d'équivalent. Ainsi, on obtient les cas suivants :
  Si $b < a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
  Si $b = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-b}{1-b}$
  Si $b > a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- ⋆ Si $0 < b < 1$:
  On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b}{1-b}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ car $1-b^n \underset{+\infty}{\sim} 1$ et en utilisant ensuite les propriétés sur le produit et le quotient d'équivalent.. Ainsi, on obtient les cas suivants :
  Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
  Si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-b}$
  Si $a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- ⋆ Si $b = 1$:
  On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{a^n}$. Ainsi, on obtient les cas suivants :
  Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par croissance comparée
  Si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
  Si $a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

19. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-1\right)$: on utilise ici les équivalents usuels. On a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2 \times \left(-\dfrac{1}{2n^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{2}$.

IV Calculs de sommes doubles

Correction 18.

1. **Calcul de $\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$:**

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1) &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\sum_{q=0}^{m} q^2 + p\sum_{q=0}^{m} 1\right]\\ &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + p(m+1)\right] = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\sum_{p=0}^{n} p + (m+1)\sum_{p=0}^{n} p\\ &= \boxed{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\frac{n(n+1)}{2} + (m+1)\frac{n(n+1)}{2}.}\end{aligned}$$

2. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$ et de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1$:**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} 1\right] = \sum_{i=1}^{n}[n] = n\sum_{i=1}^{n} 1 = \boxed{n^2.}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i} 1\right] = \sum_{i=1}^{n}[i] = \sum_{i=1}^{n} i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}.}$$

3. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$:**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} i2^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[i\sum_{j=1}^{n} 2^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[i\times 2\frac{1-2^n}{1-2}\right] = 2(2^n-1)\sum_{i=1}^{n} i = \boxed{(2^n-1)n(n+1).}$$

4. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1}$:**

On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas car on ne connaît pas la somme des inverses. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{k}{l+1} = \sum_{0\le k\le l\le n}\frac{k}{l+1} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\frac{k}{l+1}$$

On peut également détailler les calculs : $\begin{cases} 0 \le k \le n \\ k \le l \le n\end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le l \le n \\ 0 \le k \le l.\end{cases}$ Ainsi on obtient que :

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\frac{k}{l+1} = \sum_{l=0}^{n}\left[\frac{1}{l+1}\sum_{k=0}^{l} k\right] = \sum_{l=0}^{n}\left[\frac{1}{l+1}\times\frac{l(l+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n} l = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}.}$$

5. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j$:**

- Si $x=1$, on a : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$

- Si $x \neq 1$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i} x^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[x\frac{1-x^i}{1-x}\right] = \frac{x}{1-x}\sum_{i=1}^{n}(1-x^i) = \frac{x}{1-x}\left[\sum_{i=1}^{n}1 - \sum_{i=1}^{n}x^i\right].$

  Ainsi on obtient que : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \frac{x}{1-x}\left[n - x\frac{1-x^n}{1-x}\right].}$

6. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2$ **:**

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2 &= \sum_{k=0}^{n^2}\left[k\sum_{i=k}^{k+2} i^2\right] = \sum_{k=0}^{n^2}\left[k\left(k^2+(k+1)^2+(k+2)^2\right)\right] = \sum_{k=0}^{n^2} k(3k^2+6k+5)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n^2}k^3 + 6\sum_{k=0}^{n^2}k^2 + 5\sum_{k=0}^{n^2}k = \boxed{3\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)^2 + n^2(n^2+1)(2n^2+1) + 5\frac{n^2(n^2+1)}{2}.}\end{aligned}$$

7. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j}$ **:**

   - Si $x=1$, on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$
   - Si $x \neq 1$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j} = \sum_{j=1}^{n}\left[x^{-j}\sum_{i=0}^{j}x^i\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[x^{-j}\frac{1-x^{j+1}}{1-x}\right] = \frac{1}{1-x}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^j - x\right]$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j} = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}{x-1} - xn\right].}$$

8. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}$ **:**

   On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}$$

   On peut également détailler les calculs : $\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & i & \leq & n\\ i & \leq & j & \leq & n\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & j & \leq & n\\ 1 & \leq & i & \leq & j.\end{array}\right.$ Ainsi on obtient que :

   $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[2^j-1\right] = \boxed{2(2^n-1)-n.}$