

# Interro 2

15 minutes

**Exercice 1.** Soit  $f$  définie par

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad (\text{Ce n'est pas la même fonction qu'en TD.})$$

Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de  $f$ . Puis calculer sa dérivée.

**Correction 1.**  $f$  est définie pour tout  $x \geq 0$  à l'instar de la fonction racine carrée. Pour la même raison, elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

**Exercice 2.** Soit  $z$  un nombre complexe. Exprimer  $z\bar{z}$  en fonction du module de  $z$ .

**Correction 2.** Ecrivons  $z$  sous forme algébrique  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a alors

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - (iy)^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$$

**Exercice 3.** Calculer la partie réelle et imaginaire de  $(1 + i)^2(2 + 3i)$ .

**Correction 3.**  $(1 + i)^2(2 + 3i) = (1 + 2i - 1)(2 + 3i) = 2i(2 + 3i) = 4i - 6$  Donc

$$\boxed{\operatorname{Re}((1 + i)^2(2 + 3i)) = -6 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}((1 + i)^2(2 + 3i)) = 4}$$

**Exercice 4.** Parmi les formules suivantes lesquelles sont vraies ? Cochez les cases correspondantes.

- |                                                                                                               |                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\forall \theta \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ |
| <input type="checkbox"/> $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$ | <input type="checkbox"/> $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(z)^2$               |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^z)^n = e^{nz}$    | <input checked="" type="checkbox"/> $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(-\bar{z}) = \operatorname{Im}(z)$ |
| <input type="checkbox"/> $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{(z^n)} = e^{nz}$             | <input checked="" type="checkbox"/> $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$           |
| <input type="checkbox"/> $\forall z \in \mathbb{C}, e^{\bar{z}} = -e^z$                                       | <input checked="" type="checkbox"/> $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z^2} = \bar{z}^2$                         |

**Correction 4.**

- |                                                                                                                  |                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> problème de signe                                                                       | <input checked="" type="checkbox"/> c'est la définition de $e^{i\theta}$ , cf Cours                  |
| <input type="checkbox"/> manque 2i au dénominateur                                                               | <input type="checkbox"/> Ca ne marche pas avec $i$ par exemple.                                      |
| <input checked="" type="checkbox"/> cf Cours                                                                     | <input checked="" type="checkbox"/> Les deux moins se compensent                                     |
| <input type="checkbox"/> $z^n \neq zn$                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/> cf Cours                                                         |
| <input type="checkbox"/> Déjà pour $z \in \mathbb{R}$ cette relation ne fonctionne pas. Par exemple pour $z = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> Le conjugué du produit c'est le produit des conjugués. cf Cours. |