Table des matières

CH4 : Systèmes linéaires

I Généralités : notations, définitions

I. 1 Définitions : systèmes linéaires

(

I. 1. a Système linéaire de n équations à p inconnues

Définition 1. On appelle système linéaire de n équations à p inconnues tout système de la forme

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{array}\right.$$

- $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$: ....
- $(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$: ....
- $(b_i)_{1\leq i\leq n}$: ....
- $\mathcal{L}_i : a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{ip}x_p=b_i$: ....

Exemples. • $(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array}\right.$ est un système linéaire ....

• $(\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & z & = & 6 \\ & & y & + & 6z & = & 1 \end{array}\right.$ est un système linéaire ....

I. 1. b Système linéaire homogène

Définition 2. Système linéaire homogène :

- Si le second membre d'un système linéaire de n équations à p inconnues est nul, c'est-à-dire si :
  $\forall i \in [\![1, n]\!],\ b_i = 0$, le système est dit ....
- On appelle système homogène associé à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre du système linéaire $(\mathcal{S})$ par un second membre nul :

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{array}\right.$$

$$\mapsto (\mathcal{S}_0)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & 0. \end{array}\right.$$

Exemples. Donner les systèmes linéaires homogènes associés à $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$:

- $(\mathcal{S}_{0,1})\left\{\right.$

- $(\mathcal{S}_{0,2})\left\{\right.$

I. 2 Ensemble solution d'un système linéaire

I. 2. a Solution d'un système linéaire

Définition 3. Ensemble solution :

- Une solution d'un système linéaire de n équations à p inconnues $(\mathcal{S})$ est ....
  ....
- Résoudre $(\mathcal{S})$, c'est déterminer ....

Exemples. • Un système linéaire homogène de n équation à p inconnues a toujours au moins une solution : ....

• Résoudre les systèmes linéaires $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$.

I. 2. b Systèmes linéaires compatibles

Définition 4. Un système linéaire est dit compatible ....
Sinon, il est dit incompatible.

Exemples. • Exemple de système toujours compatible : ....

• $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$ sont ....

• Le système $(\mathcal{S}_3)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & y & & & = & 5 \end{array}\right.$ est-il compatible ? ....

I. 2. c Systèmes linéaires équivalents

Définition 5. Deux systèmes linéaires sont dits équivalents ....

Remarque.

I. 3 Système de Cramer

Définition 6. Un système de Cramer est un système linéaire ....
....

Exemples.

II Cas particuliers importants : les systèmes échelonnés

Les systèmes échelonnés sont des systèmes linéaires que l'on sait résoudre facilement.
La partie 3 présentera alors une méthode qui permet de ramener tout système à un système échelonné.

II. 1 Systèmes linéaires triangulaires

Ce sont des systèmes échelonnés particuliers.

Définition 7. Un système linéaire est dit triangulaire s'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{a_{11}}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}}x_2 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & = & \vdots \\
 & & & & \boxed{a_{ii}}x_i & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
 & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{nn}}x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

Les coefficients encadrés doivent être NON NULS et sont appelés les ....

Exemple. Résoudre le système suivant : $(\mathcal{S}_4)\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\
 & & y & + & 2z & + & 3t & = & 2 \\
 & & & & z & + & 2t & = & 3 \\
 & & & & & & t & = & 4
\end{array}\right.$

Méthode : Calculer la solution de proche en proche en remontant de la dernière ligne à la première.

II. 2 Systèmes linéaires échelonnés

Définition 8. On dit qu'un système linéaire de n équations à p inconnues est un système échelonné s'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}}x_1 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & & & \boxed{a_{2j}}x_j & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}}x_r & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & = & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

Les coefficients encadrés doivent être NON NULS et sont appelés les ....
D'une ligne à l'autre, il y a au moins une inconnue de moins de façon consécutive puis éventuellement des lignes triviales sans inconnues.

Exemples.

II. 2. a Rang d'un système linéaire échelonné

C'est une notion très importante qui intervient dans de nombreux chapitres.

> **Définition 9.** On appelle rang d'un système linéaire échelonné, le nombre ....
>
> ....

Exemples. Donner les rangs des systèmes $(\mathcal{S}_4)$ et des trois exemples donnés ci-dessus.

Remarques.
- Le rang est inférieur ou égal ....
- Le rang ne dépend pas ....

II. 2. b Résolution : ensemble solution

> **Proposition 10.** Soit $(\mathcal{S})$ un système échelonné de n équations à p inconnues et soit r son rang.
>
> 1. Si $(\mathcal{S})$ comporte au moins une équation de type $0 = b_k$ avec $b_k \neq 0$: ....
> ....
>
> 2. Si $(\mathcal{S})$ ne comporte pas d'équation de type $0 = b_k$ avec $b_k \neq 0$ (mais il peut comporter des équations de type 0=0), alors le système $(\mathcal{S})$ a des solutions, il est compatible. Plus précisemment,
>   (a) Si $r = p$, alors le système $(\mathcal{S})$ a une .... qui s'obtient en éliminant les équations $0 = 0$ et en déterminant la valeur de chaque inconnue par une lecture de bas en haut.
>   (b) Si $r < p$, alors le système $(\mathcal{S})$ a une ....
>   - Les inconnues $x_1, \ldots, x_r$ correspondant aux pivots sont appelées ....
>   - Les $p - r$ autres inconnues $x_{r+1}, \ldots, x_p$ sont appelées ....
>   - On passe en second membre les $p-r$ inconnues secondaires qui deviennent des paramètres. On obtient un système triangulaire que l'on sait résoudre. L'ensemble des solutions est ainsi paramétré par les $p - r$ inconnues secondaires. On dit qu'il y a $p - r$ ....

Méthode :
- Reconnaître un système linéaire échelonné à ...... équations et ...... inconnues.
- Calculer le rang.
- Identifier les inconnues principales et des inconnues secondaires.
- Les inconnues secondaires passent au second membre et jouent alors le rôle de paramètre.
- Résoudre le système en remontant les calculs.

Exemples.
- Résoudre le système $(\mathcal{S}_4)$.
- Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_5)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & + & w & = & 1 \\ & & y & & & + & t & & & = & 2 \\ & & & & 2z & & & + & 3w & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_6)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & \alpha \\ & & 3y & - & 4z & = & \beta \\ & & & & 5z & = & \gamma \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_7)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & + & w & = & 1 \\ & & & & z & - & t & & & = & 6 \\ & & & & & & 2t & + & w & = & 8 \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & & & 0 & = & 9 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_8)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} a & - & b & + & 2c & - & 3d & + & e & = & 0 \\ & & 2b & + & 4c & + & d & - & 5e & = & 3 \\ & & & & & & 2d & + & 3e & = & -1 \end{array}\right.$$

III Méthode du pivot de Gauss

Nous savons donc résoudre les systèmes linéaires échelonnés. Nous allons maintenant établir que tout système linéaire peut être mis sous la forme d'un système échelonné qui lui est ÉQUIVALENT par une succession de transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

III. 1 *Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes*

Proposition 11. Un système $(\mathcal{S}_1)$ est transformé en un système $(\mathcal{S}_2)$ qui lui est ÉQUIVALENT si :

- on échange la colonne i avec la colonne j : $C_i \leftrightarrow C_j$.
- on échange la ligne i avec la ligne j : $L_i \leftrightarrow L_j$.
- on multiplie la ligne i par un scalaire α NON NUL :

$$L_i \leftarrow \alpha L_i, \ \alpha \neq 0.$$

- on remplace la ligne d'indice i par la somme de la ligne i et de β fois la ligne j :

$$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j \\ \boxed{\alpha \neq 0} \end{array}\right.$$

Remarque. 1. Importance de ne procéder que par ÉQUIVALENCES. Ainsi, les seules opérations à effectuer sur un système sont les opérations ci-dessus.

2. On peut appliquer une combinaison à plusieurs lignes en même temps si on choisit une ligne pivot (par exemple L_1) qui n'est pas modifiée et que toutes les combinaisons se font à partir de

cette ligne :

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \quad \leftarrow \quad \alpha_2 L_2 + \beta_2 L_1 \quad (\alpha_2 \neq 0) \\ \vdots \\ L_n \quad \leftarrow \quad \alpha_n L_n + \beta_n L_1 \quad (\alpha_n \neq 0). \end{cases}$$

Exemple. Résoudre le système suivant : $(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - 2y - z = 4 \\ -x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$

III. 2 *Algorithme du pivot de Gauss*

III. 2. a *Description de l'algorithme du pivot de Gauss*

Méthode :

- À chaque étape, on choisit une ligne pivot et un pivot. On fait tous les calculs par rapport à cette ligne pivot.
- On utilise alors les opérations élémentaires sur les lignes :
  - ⋆ La ligne pivot n'est pas modifiée.
  - ⋆ Toutes les opérations élémentaires se font à partir de cette ligne.
  - ⋆ Choix des opérations : élimination d'une même inconnue dans toutes les lignes sauf la ligne pivot.
- On transforme ainsi notre système linéaire de départ en un système linéaire échelonné équivalent.

Exemples. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

- $(\mathcal{S}_{10}) : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + y + 3z = 1 \end{cases}$
- $(\mathcal{S}_{11}) : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

Remarques. 1. ⚠ À chaque étape, le pivot doit être ....
Attention aux systèmes dont les coefficients dépendent d'un ou plusieurs paramètres (voir plus loin).

2. On a intérêt à choisir un pivot le plus simple possible, le mieux étant 1 ou -1. Ainsi, il est parfois intéressant d'échanger des lignes ou des inconnues pour faire apparaître un pivot plus simple.

III. 2. b *Conséquence : solution d'un système linéaire*

Théorème 12. Ensemble solution d'un système linéaire :

- Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné de même taille.
- Ainsi, un système linéaire a ....

III. 2. c Conséquence : rang d'un système linéaire

Définition 13. Rang :
On appelle rang d'un système linéaire, échelonné ou pas, ...

Remarque. Pour un même système linéaire, selon les choix faits lors de l'algorithme du pivot de Gauss, on peut obtenir des systèmes échelonnés différents. Ces systèmes échelonnés sont tous équivalents puisqu'ils sont équivalents à un même système. Pour autant, il est parfois difficile de s'en rendre compte au premier coup d'oeil. Il existe néanmoins une caractéristique commune à tous ces systèmes qui est justement leur rang.

Exemples. Donner le rang des systèmes linéaires $\mathcal{S}_9$ à $\mathcal{S}_{11}$.

III. 3 Systèmes linéaires à paramètres

Méthode : Faire des cas selon que les pivots choisis sont nuls ou non.

- Si les pivots sont non nuls : appliquer la méthode du pivot de Gauss.
- Résoudre le système à part pour les valeurs particulières des paramètres pour lesquelles les pivots s'annulaient.

Exemple. Résoudre le système suivant en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{S}_{12}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -(2+m)x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & (1-m)y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array} \right.$$