DM4

A faire avant le vendredi 8 octobre

Copies accéptées jusqu'au lundi 3 octobre

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z+1| \leq 1$. Montrer alors que

$$-2 \leq \mathfrak{Re}(z) \leq 0$$

On n'est pas obligé d'utiliser la forme algébrique...

Exercice 2. On considère l'équation du second degré suivante :

$$z^2 + (3i-4)z + 1 - 7i = 0 \quad (E)$$

1. A la manière d'une équation réelle, calculer le discriminant Δ du polynôme complexe, et montrer que $\Delta = 3 + 4i$
2. On se propose de résoudre (E_2) : $u^2 = \Delta$ d'inconnue complexe u.
   (a) On écrit $u = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que (E_2) est équivalent à

   $$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

   (b) En déduire que les solutions de (E_2) sont

   $$u_1 = 3 - i \quad \text{et} \quad u_2 = 1 - 2i$$

3. Soit u_1 une solution de l'équation précédente. On considère $r_1 = \frac{-3i+4+u_1}{2}$. Montrer que r_1 est solutions de l'équation (E).
4. Quelle est à l'autre solution de (E) ?

Exercice 3. Soit $(n, p, k, j) \in \mathbb{N}^4$ avec $k \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, k]\!]$. Montrer que

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}.$$

Exercice 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.