

Correction TD4 : Systèmes linéaires

I Systèmes linéaires sans paramètre

Correction 1.

1. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -y + 3x + z = 5 \\ y + 2x - z = 1 \\ -y + x + z = 2 \\ y + 4x + z = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -y + 3x + z = 5 \\ 5x = 6 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_1 + L_2} \\ -2x = -3 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\ 7x + 2z = 8 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 + L_1} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -y + 3x + z = 5 \\ 5x = 6 \\ 0 = -3 & \mathbf{L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2} \\ 7x + 2z = 8 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le système est échelonné de rang 3. La troisième équation est impossible, donc le système est incompatible :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2. On obtient :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ -5y - 8z + t = -4 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ -4y - 10z + 8t = -14 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \\ -7y - 4z + 5t = -20 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2t + 2y + 3z = 6 \\ t - 5y - 8z = -4 \\ 8t - 4y - 10z = -14 \\ 5t - 7y - 4z = -20 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2t + 2y + 3z = 6 \\ t - 5y - 8z = -4 \\ 36y + 54z = 18 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2} \\ 18y + 36z = 0 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2t + 2y + 3z = 6 \\ t - 5y - 8z = -4 \\ 36y + 54z = 18 \\ 18z = -18 & \mathbf{L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le rang est 4. L'ensemble des solutions est donné par $\mathcal{S} = \{(1, 2, -2, -1)\}$. C'est un point de \mathbb{R}^4 .

3. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 2x = 1 \\ -y - z + x = 2 \\ -y - z + 4x = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 2x = 1 \\ 3x = 3 & \mathbf{L_2} \leftarrow \mathbf{L_2} + \mathbf{L_1} \\ 6x = 4 & \mathbf{L_3} \leftarrow \mathbf{L_3} + \mathbf{L_1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 2x = 1 \\ 3x = 3 \\ 0 = -2 & \mathbf{L_3} \leftarrow \mathbf{L_3} - 2\mathbf{L_2} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est échelonné de rang 2 et $\mathcal{S} = \emptyset$.

4. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ -2y - 2z + 2t = 1 & \mathbf{L_2} \leftarrow \mathbf{L_2} - \mathbf{L_1} \\ -2y - 2z = 2 & \mathbf{L_3} \leftarrow \mathbf{L_3} - \mathbf{L_1} \end{cases}$$

Le système est échelonné, de rang 3. On choisit x, y, t comme variables principales, et on fait passer t au second membre :

$$\begin{aligned} (S_4) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - t = 1 - z \\ -2y + 2t = 1 + 2z \\ y = -1 - z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ y = -1 - z \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, -1 - z, z, -\frac{1}{2} \right), z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, -1, 0, -\frac{1}{2} \right) + z(0, -1, 1, 0), z \in \mathbb{R} \right\}$. On obtient

une droite de \mathbb{R}^4 passant par $\left(\frac{3}{2}, -1, 0, -\frac{1}{2} \right)$ et de vecteur directeur $(0, -1, 1, 0)$.

5. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z - y + 3x = 5 \\ -z + y + x = -2 \\ z + 2y - x = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z - y + 3x = 5 \\ 4x = 3 & \mathbf{L_2} \leftarrow \mathbf{L_2} + \mathbf{L_1} \\ 3y - 4x = -2 & \mathbf{L_3} \leftarrow \mathbf{L_3} - \mathbf{L_1} \end{cases} \end{aligned}$$

Le rang est échelonné et de rang 3. On obtient en remontant les équations : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{37}{12} \right) \right\}$.

6. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 - 6x_4 - 4x_5 = 0 & \mathbf{L_3} - 2\mathbf{L_1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -12x_4 + 2x_5 = 0 & \mathbf{L_3} + 3\mathbf{L_2} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x_1, x_2, x_4 comme inconnues principales, et on passe x_3, x_5 au second membre. On obtient :

$$(S_6) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = & x_3 \\ & x_2 - 2x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ & & x_4 = \frac{x_5}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + \frac{17}{6}x_5 \\ x_2 = -x_3 - \frac{5}{3}x_5 \\ x_3 = \frac{x_5}{6} \end{cases}$$

et $\mathcal{S} = \left\{ \left(3x_3 + \frac{17}{6}x_5, -x_3 - \frac{5}{3}x_5, x_3, \frac{1}{6}x_5, x_5 \right), (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

7. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 1 \\ x + 3y + 3z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 1 \\ & y - t = -1 \end{cases} \quad \mathbf{L_2} \leftarrow \mathbf{L_2} - \mathbf{L_1}$$

Le système est échelonné est le rang est 2 On choisit x et y comme variables principales, et on fait passer z, t au second membre. On obtient :

$$(S_7) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3z - 4t \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{(3 - 3z - 4t, t - 1, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

8. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 5a + b + 2c = 13 \\ 4a + 2b + c = 11 \\ a - b + c = 2 \\ 3a + b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c + 5a = 13 \\ 2b + c + 4a = 11 \\ -b + c + a = 2 \\ b + c + 3a = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c + 5a = 13 \\ -3c - 6a = -15 & \mathbf{L_2} \leftarrow \mathbf{L_2} - \mathbf{2L_1} \\ 3c + 6a = 15 & \mathbf{L_3} \leftarrow \mathbf{L_3} + \mathbf{L_1} \\ -c - 2a = -5 & \mathbf{L_4} \leftarrow \mathbf{L_4} - \mathbf{L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c + 5a = 13 \\ c + 2a = 5 \end{cases}$$

Le système est échelonné et le rang est 2. On choisit b et c comme inconnues principale, et on fait passer a au second membre. On obtient :

$$(S_8) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ c = 5 - 2a \end{cases}$$

Ainsi : $\mathcal{S} = \{(a, 3 - a, 5 - 2a), a \in \mathbb{R}\} = \{(0, 3, 5) + a(1, -1, -2), a \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble est une droite de \mathbb{R}^3 , passant par le point de coordonnées $(0, 3, 5)$ et de vecteur directeur $(1, -1, -2)$.

9. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z - u - v = 0 \\ x - y - z - u + 2v = 0 \\ -x + 2y + 3z + u - v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z + u - v = 0 \\ 3x + 2y + z - u - v = 0 \\ x - y - z - u + 2v = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z + u - v = 0 \\ 8y + 10z + 2u - 4v = 0 & \mathbf{L_2} + \mathbf{3L_1} \\ y + 2z + v = 0 & \mathbf{L_3} + \mathbf{L_1} \end{cases}$$

$$(S_9) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z + u - v = 0 \\ y + 2z + v = 0 \\ 4y + 5z + u - 2v = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z + u - v = 0 \\ y + 2z + v = 0 \\ -3z + u - 6v = 0 \quad \mathbf{L_3 - 4L_2} \end{cases}$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x, y, z comme inconnues principales, et on met u, v au second membre. On obtient :

$$(S_9) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -v - \frac{1}{3}u \\ y = 3v - \frac{2}{3}u \\ z = \frac{u}{3} - 2v \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \left(-v - \frac{1}{3}u, 3v - \frac{2}{3}u, \frac{u}{3} - 2v, u, v \right), (u, v) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

10. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ x + 2y + z - 4t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ 5y - 3z + t = -3 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\ \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ 4y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x, z, t comme inconnues principales, et on met y au second membre. On obtient :

$$(S_{10}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ t = y - 3 \\ z = 2y \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{(-8, y, 2y, y - 3), y \in \mathbb{R}\}$.

II Systèmes linéaires avec paramètre

Correction 2. Discuter les solutions dans \mathbb{R} des systèmes suivants en fonction des paramètres indiqués :

$$1. \begin{cases} mx + y + z = X \\ x + my + z = Y \\ x + y + mz = Z \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

On applique la méthode du pivot de Gauss, en faisant attention d'échanger les lignes pour avoir au maximum

des pivots indépendants de m :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = Z \\ x + my + z = Y \\ mx + y + z = X \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = Z \\ (m-1)y + (1-m)z = Y - Z & \mathbf{L}_2 \leftarrow \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \\ (1-m)y + (1-m^2)z = X - mZ & \mathbf{L}_3 \leftarrow \mathbf{L}_3 - m\mathbf{L}_1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = Z \\ (m-1)y + (1-m)z = Y - Z \\ (2-m-m^2)z = X - mZ + Y - Z & \mathbf{L}_3 \leftarrow \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a un système échelonné. On fait des cas sur les pivots : $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, et $2 - m - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \notin \{1, -2\}$.

- Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors le système est de rang 3, et on obtient, en remontant les équations :

$$\mathcal{S}_{m \notin \{1, -2\}} = \left\{ \left(\frac{Z + Y - (1+m)X}{(1-m)(2+m)}, \frac{Z - (1+m)Y + X}{(1-m)(2+m)}, \frac{X + Y - (m+1)Z}{(1-m)(2+m)} \right) \right\}.$$

- Si $m = 1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = Z \\ \quad \quad + 0 = Y - Z \\ \quad \quad \quad 0 = X + Y - 2Z \end{cases}$$

Le système est de rang 1, et on a deux équations de compatibilité : $0 = Y - Z$ et $0 = X + Y - 2Z$.

- ★ Si $X = Y = Z$, les deux équations sont vérifiées et on a

$$\mathcal{S}_{m=1} = \{(-y - z + Z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- ★ Si $X \neq Y$ ou $X \neq Z$, alors

$$\mathcal{S}_{m=1} = \emptyset.$$

- Si $m = -2$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - 2z = Z \\ \quad \quad -3y + 3z = Y - Z \\ \quad \quad \quad 0 = X + Y + Z \end{cases}$$

Le système est de rang 2, et on a une équation de compatibilité : $0 = X + Y + Z$.

- ★ Si $X + Y + Z = 0$, on a :

$$\mathcal{S}_{m=-2} = \left\{ \left(z + \frac{Y + 2Z}{3}, z + \frac{Z - Y}{3}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ★ Si $X + Y + Z \neq 0$, alors

$$\mathcal{S}_{m=-2} = \emptyset.$$

$$2. \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

On résout ce système linéaire de deux équations à deux inconnues. Ici, tous les coefficients dépendent de m : on est obligés de faire des cas sur m dès le départ.

- Si $m \neq 1$, on peut prendre la première ligne comme ligne pivot, et on obtient :

$$(S) \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ - (2m+1)y = 2m^2 - m - 1 \end{cases} \quad (\mathbf{m+1})\mathbf{L}_2 - \mathbf{mL}_2$$

Le système est échelonné. On refait des cas sur m pour que les pivots soient non nuls.

- ★ Si $m \neq -\frac{1}{2}$: on obtient alors le système suivant, en remarquant que $2m^2 - m - 1 = (m-1)(2m+1)$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ y = 1 - m. \end{cases}$$

Ainsi, si $m \neq -1$ et si $m \neq -\frac{1}{2}$, le système est de rang 2 et est donc un système de Cramer, avec :

$$\mathcal{S}_{m \notin \{-1, -\frac{1}{2}\}} = \{(m, 1 - m)\}.$$

- ★ Si $m = -\frac{1}{2}$:

On obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

On obtient un système échelonné de deux inconnues et dont le rang est 1. Il admet ainsi une infinité de solutions. On choisit x comme inconnue principale et y comme inconnue secondaire et on obtient

$$\mathcal{S}_{m = -\frac{1}{2}} = \{(-2 + y, y), y \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $m = -1$, on obtient en remplaçant dans le système de départ :

$$\begin{cases} -y = -2 \\ -x = 1 \end{cases}$$

Ainsi, on a : $\mathcal{S}_{m = -1} = \{(-1, 2)\}.$

$$3. \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

On commence par résoudre le système en éliminant les cas où le pivot est nul.

$$(S) \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow (S') \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ + m(1 - m^2)z = 2m(1 - m) \\ (1 + m^2)y - m^2(1 + m)z = 1 - m - 2m^2. \end{cases}$$

On réécrit le système (S') en le mettant sous forme triangulaire et on obtient le système équivalent suivant

$$(S'') : \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ (1 + m^2)y - m^2(1 + m)z = 1 - m - 2m^2 \\ m(1 - m^2)z = 2m(1 - m). \end{cases}$$

- Si $m \neq -1$, $m \neq 0$ et $m \neq 1$, on obtient un système de Cramer (de rang 3) que l'on résout en remontant les calculs et on obtient :

$$\mathcal{S}_{m \notin \{-1, 0, 1\}} = \left\{ \left(\frac{m(m^2 + 3)}{(1+m)(1+m^2)}, \frac{1-m}{1+m^2}, \frac{2}{1+m} \right) \right\}.$$

- Si $m = -1$, on reprend le système (S'') (on reprend au niveau où on a dû faire l'hypothèse de non égalité) et on obtient :

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2y = 0 \\ 0 = -4. \end{cases}$$

La dernière équation n'a pas de solution, donc on a : $\mathcal{S}_{m=-1} = \emptyset$.

- Si $m = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Le système est de rang 2, et a pour solutions : $\mathcal{S}_{m=0} = \{(0, 1, z), z \in \mathbb{R}\}$.

- Si $m = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - 2z = -2 \\ 0 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - z - 1 + z \\ y = -1 + z \end{cases}$$

Le système est de rang 2, et a pour solutions : $\mathcal{S}_{m=1} = \{(1, -1 + z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

$$4. \begin{cases} (m-1)x - my = m \\ (m+1)x + (m+1)y = m^2 - 1 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

Je ne donne ici que le résultat :

- Si $m \neq -1$ et $m \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathcal{S}_{m \notin \{-1, \frac{1}{2}\}} = \left\{ \left(\frac{m^2}{2m-1}, \frac{m^2 - 3m + 1}{2m-1} \right) \right\}$.

- Si $m = \frac{1}{2}$, alors $\mathcal{S}_{m=\frac{1}{2}} = \emptyset$.

- Si $m = -1$, alors $\mathcal{S}_{m=-1} = \{(x, -1 + 2x), x \in \mathbb{R}\}$.

$$5. \begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

Je ne donne ici que le résultat :

- Si $m \neq 1$ et $m \neq -1$, le système est alors un système de Cramer et $\mathcal{S}_{m \notin \{1, -1\}} = \left\{ \left(\frac{m^2}{1+m}, \frac{m^2}{1+m} \right) \right\}$.

- Si $m = 1$, alors $\mathcal{S}_{m=1} = \{(x, 1 - x), x \in \mathbb{R}\}$.

- Si $m = -1$, alors $\mathcal{S}_{m=-1} = \emptyset$.

$$6. \begin{cases} y + z = rx \\ x + z = ry \\ x + y = rz \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$$

Attention qu'ici, il faut absolument repasser les x, y, z à gauche du système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y + z = rx \\ x + z = ry \\ x + y = rz \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -rx + y + z = 0 \\ x - ry + z = 0 \\ x + y - rz = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - rz = 0 \\ x - ry + z = 0 \\ -rx + y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - rz = 0 \\ (-r-1)y + (1+r)z = 0 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ (1+r)y + (1-r^2)z = 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 + rL_1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - rz + y = 0 \\ (1+r)z + (-r-1)y = 0 \\ (1-r^2)z + (1+r)y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - rz + y = 0 \\ (1+r)z + (-r-1)y = 0 \\ (-r^2 + r + 2)y = 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - (1-r)rL_2} \end{cases} \end{aligned}$$

On fait des cas sur r :

- Si $r \neq -1$ et $r \neq 2$, alors on a un système de rang 3, qui a donc une unique solution. Or le système est homogène, donc : $\mathcal{S}_{r \notin \{-1, 2\}} = \{(0, 0, 0)\}$.
- Si $r = 2$, alors on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z + y = 0 \\ 3z - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est de rang 2, et les solutions sont données par : $\mathcal{S}_{r=2} = \{(z, z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

- Si $r = -1$, alors on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z + y = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - (1-r)rL_2} \end{cases}$$

Le système est de rang 1 et les solutions sont données par : $\mathcal{S}_{r=-1} = \{(-y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

III Divers

Correction 3. Soit la fonction f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (3x + 2y, 5x + 3y). \end{cases}$$

Montrer que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (X, Y)$ et donner l'expression de x et y en fonction de X et Y .

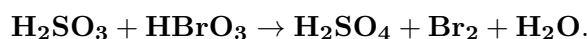
Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On cherche s'il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (X, Y)$. On résout ainsi :

$$\begin{cases} 3x + 2y = X \\ 5x + 3y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = X \\ y = 5X - 3Y \end{cases} \quad \mathbf{5L_1 - 3L_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3X + 2Y \\ y = 5X - 3Y. \end{cases}$$

Ainsi, on a montré que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ il existe un unique $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X, Y) = f(x, y)$: f est donc bijective. De plus, on a $f(x, y) = (X, Y) \Leftrightarrow (x, y) = (-3X + 2Y, 5X - 3Y)$ donc la bijection réciproque est donnée par :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) & \mapsto (-3X + 2Y, 5X - 3Y). \end{cases}$$

Correction 4. Équilibrer la réaction chimique suivante :



On note x le nombre de molécules de H_2SO_3 , y celui de $HBrO_3$, z celui de H_2SO_4 , t celui de Br_2 et u celui de H_2O . Afin d'équilibrer la réaction chimique suivante, on doit résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x & - z & & & = 0 \\ 2x & + y & - 2z & - 2u & = 0 \\ 3x & + 3y & - 4z & - u & = 0 \\ & y & & - 2t & = 0. \end{cases}$$

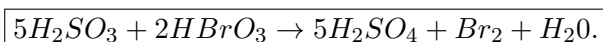
On peut mettre ce système sous la forme échelonnée suivante

$$\begin{cases} x & - z & & & = 0 \\ & - z & - u & + 3y & = 0 \\ & & - 2u & + y & = 0 \\ & & & y & - 2t = 0. \end{cases}$$

C'est un système échelonné de rang 4 avec 5 inconnues, il y a donc une infinité de solutions. Les inconnues principales sont ici x , y , z , u et l'inconnue secondaire est t . En résolvant ce système de bas en haut, on obtient la solution suivante

$$\mathcal{S} = \{(5t, 2t, 5t, t, t), t \in \mathbb{R}\}.$$

En prenant par exemple $t = 1$ et en remettant dans la réaction chimique, on trouve la réaction chimique équilibrée suivante



Correction 5. La somme des carrés.

1. **Trouver un polynôme de degré 3 tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$:**

Un polynôme de degré 3 s'écrit sous la forme générale suivante :

$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminons les coefficients $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que P vérifie la condition voulue :

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) = X^2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d = X^2 \\ &\Leftrightarrow 3aX^2 + 3aX + a + 2bX + b + c = X^2. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système linéaire suivant, que l'on peut mettre directement sous la forme échelonnée suivante :

$$\begin{cases} c + b + a = 0 \\ 2b + 3a = 0 \\ 3a = 1. \end{cases}$$

La résolution donne : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, d \right), d \in \mathbb{R} \right\}$. Il n'y a aucune condition sur d , on peut par exemple prendre $d = 0$. Ainsi, le polynôme suivant convient

$$P(X) = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X.$$

2. **Retrouver alors l'expression de $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$:**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On calcule S_n en utilisant le polynôme P trouvé à la question précédente et en prenant $X = k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n P(k+1) - \sum_{k=1}^n P(k) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} P(k) - \sum_{k=1}^n P(k) \\ &= P(n+1) - P(1) \\ &= \frac{2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1) - 2 + 3 - 1}{6} \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule connue.

Correction 6. On considère les points $A = (1, 2, -1)$ et $B = (-2, 4, 0)$.

1. **Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de (AB) .**

La droite (AB) passe par le point $A = (1, 2, -1)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3, 2, 1)$.

On en déduit une équation paramétrique de (AB) :

$$\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Trouvons une équation cartésienne de (AB) :

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda = x \\ 2 + 2\lambda = y \\ -1 + \lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = z + 1 \\ 2\lambda = y - 2 \\ -3\lambda = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = z + 1 \\ 0 = y - 2z - 4 \\ 0 = x + 3z + 2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$M \in (AB) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \right) \iff \begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Donc (AB) a pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

2. **En fonction de $m \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de (AB) avec la droite \mathcal{D}_m .**

Première remarque : $\overrightarrow{AB}(-3, 2, 1)$ est un vecteur directeur de (AB) , et $\vec{u}(1, -2, 2)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D}_m (quel que soit le réel m).

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (AB) et \mathcal{D}_m ne sont pas parallèles. On en déduit :

- soit (AB) et \mathcal{D}_m sont sécantes, et leur intersection sera réduite à un point ;
- soit (AB) et \mathcal{D}_m sont non coplanaires, et leur intersection sera vide.

Lorsque m varie, la direction de la droite \mathcal{D}_m ne change pas, mais cette droite "glisse" le long de l'axe (Oz) , puisqu'elle passe par le point $E_m(3, 2, m)$.

Comme l'axe (Oz) n'est pas parallèle à (AB) , on s'attend à ce que, pour une valeur de m donnée, la droite \mathcal{D}_m coupe (AB) , et que pour toutes les autres, \mathcal{D}_m et (AB) soient non coplanaires.

Passons à présent aux calculs :

Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour trouver $\mathcal{D}_m \cap (AB)$, prenons un point de \mathcal{D}_m et regardons à quelle condition il appartient à (AB) .

Soit $M(x, y, z)$ un point de \mathcal{D}_m : $\exists s \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = s + 3 \\ y = -2s + 2 \\ z = 2s + m \end{cases}$. On résout :

$$M \in (AB) \iff \begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2s + 2 - 2(2s + m) - 4 = 0 \\ s + 3 + 3(2s + m) + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -6s - 2m - 2 = 0 \\ 7s + 3m + 5 = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$M \in (AB) \iff \begin{cases} 3s + m = -1 \\ 7s + 3m = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} 3s + m = -1 \\ 2m = -8 \quad \mathbf{L_2} \leftarrow \mathbf{3L_2} - \mathbf{7L_1} \end{cases} \iff \begin{cases} s = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

Conclusion :

- Si $m = -4$, alors $M \in (AB) \iff s = 1 \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$, donc l'unique point d'intersection de \mathcal{D}_m avec

(AB) est $M_0(4, 0, -2)$.

- Si $m \neq -4$, alors l'équation $M \in (AB)$ n'a pas de solution lorsque M est un point de \mathcal{D}_m , donc l'intersection de \mathcal{D}_m avec (AB) est vide.