Correction DM6

Exercice 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+2y & = & \lambda x \\ x+3y & = & \lambda y \end{array} \right.$$

1. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
2. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
3. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$.

Correction 1.

1. On met le système sous forme échelonné

$$(S_\lambda) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (2-\lambda)x+2y & = & 0 \\ x+(3-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+(3-\lambda)y & = & 0 \\ (2-\lambda)x+2y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+(3-\lambda)y & = & 0 \\ +2y-(3-\lambda)(2-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où

$$(S_\lambda) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+(3-\lambda)y & = & 0 \\ (-\lambda^2+5\lambda-4)y & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système n'est pas de Cramer si $(\lambda^2+5\lambda-4)=0$, soit

$$\Sigma = \{1,4\}$$

2. — $\underline{\lambda=1}$ On obtient $S_1 \iff x+2y=0$

$$\mathcal{S}_1 = \{(-2y,y)|y\in\mathbb{R}\}$$

— $\underline{\lambda=4}$ On obtient $S_4 \iff x-y=0$

$$\mathcal{S}_4 = \{(x,x)|x\in\mathbb{R}\}$$

3. Si λ n'est pas dans Σ, le système est de Cramer, il admet donc une unique solution. Comme $(0,0)$ est solution, c'est la seule.

$$\mathcal{S}_\lambda = \{(0,0)\}$$

Exercice 2. Résoudre le système suivant où x,y,z sont des réels positifs (on pourra utiliser une fonction qui transforme les $\times$ en $+$....) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{13} & = & 2 \\ x^2yz^7 & = & 3 \end{array} \right.$$

Correction 2. Comme tous les éléments sont positifs on peut prendre le logartihme. On note $X=\ln(x), Y=\ln(y)$ et $Z=\ln(z)$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2X+2Y+6Z & = & 0 \\ 4X+5Y+13Z & = & \ln(2) \\ 2X+Y+7Z & = & \ln(3) \end{array} \right.$$

On résout ensuite le système en (X,Y,Z). Tout d'abord on échelonne le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2X+2Y+6Z & = & 0 \\ 4X+5Y+13Z & = & \ln(2) \\ 2X+Y+7Z & = & \ln(3) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2X+2Y+6Z & = & 0 \\ 0+Y+Z & = & \ln(2) \\ -Y+Z & = & \ln(3) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2X+2Y+6Z & = & 0 \\ Y+Z & = & \ln(2) \\ 2Z & = & \ln(3)+\ln(2) \end{array} \right.$$

Une fois que le système est échelonné, on résout en remontant les lignes. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2X+2Y+6Z &=& 0 \\ Y+Z &=& \ln(2) \\ Z &=& \ln(\sqrt{6}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X+2Y+6Z &=& 0 \\ Y &=& \ln(\frac{2}{\sqrt{6}}) \\ Z &=& \ln(\sqrt{6}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X &=& -\ln(\frac{4}{6})-\ln(6^3) \\ Y &=& \ln(\frac{2}{\sqrt{6}}) \\ Z &=& \ln(\sqrt{6}) \end{array}\right.$$

Soit encore $X=\ln(\sqrt{\frac{1}{6^24}})$, $Y=\ln(\frac{2}{\sqrt{6}})$ et $Z=\ln(\sqrt{6})$. D'où

$$x=\frac{1}{12}, \quad y=\frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad z=\sqrt{6}$$

Exercice 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\left\{\begin{array}{rl} u_0 &= 0 \\ \forall n\geq 0,\ u_{n+1} &= 2u_n+v_n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} v_0 &= 1 \\ \forall n\geq 0,\ v_{n+1} &= u_n+v_n \end{array}\right.$$

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument n et retourne la valeur de u_n et v_n.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_{n+2}=3u_{n+1}-u_n$$
3. En déduire la valeur de u_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$. (Il va y avoir des $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ qui trainent mais c'est faisable)

Correction 3.

— Fonction prenant n et u_0, v_0 en paramètre. Pour calculer u_10 on peut faire par `suite(10,1,0)`

```
def suite(n,u0,v0):
    u,v=u0,v0 \# affection simultanee
    for i in range(n):
        u,v=2*u+v, u+v \# affection simultanee
    return(u,v)
```

— D'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :
$$u_{n+2}=2u_{n+1}+v_{n+1}$$
D'après la définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :
$$v_{n+1}=u_n+v_n$$
Donc
$$u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n+v_n$$
et en reprenant la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :
$$v_n=u_{n+1}-2u_n.$$
Donc
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1}+u_n+u_{n+1}-2u_n \\ &= 3u_{n+1}-u_n \end{aligned}$$

— On applique la méthode du cours. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite linéaire récurrente d'ordre deux à coefficients constant. L'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $X^2-3X+1=0$ dont les solutions sont
$$r_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n = A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Les conditions initiales donnent :

$$u_0 = 0 = A + B$$

et

$$u_1 = 2u_0 + v_0 = 1 = A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Le système à résoudre est donc

$$\left\{\begin{array}{ccccc} A & + & B & = 0 \\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)A & + & \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)B & = 1 \end{array}\right.$$

on fait $L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)L_1$ On obtient :

$$\left\{\begin{array}{cccc} A & + & B & = 0 \\ & - & \sqrt{5}B & = 1 \end{array}\right.$$

Donc

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Finalement

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$