

TD 8 : Applications

I Images directe

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f .
2. Déterminer $f([1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1, +\infty[)$.

Exercice 2. 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction carrée. Déterminer $f([-1, 2])$.

2. Déterminer $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right)$.

Exercice 3. Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{R} qui, à tout complexe associe son module.

1. Calculer l'image directe de :
 - (a) $A = \{z \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{R}, z = x + 2i\}$
 - (b) $A = \{z \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{R}, z = (1 + \cos(x)) + i \sin(x)\}$.

II Injection, surjection, bijection sur des exemples concrets

Exercice 4. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ | 7. $f : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto x \end{cases}$ | 13. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]1, +\infty[\\ x \mapsto e^{-x} + 1 \end{cases}$ |
| 2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ | 8. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$ | 14. $f : \begin{cases}]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+x) \end{cases}$ |
| 3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$ | 9. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{cases}$ | 15. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]-4, +\infty[\\ x \mapsto 2^x - 4 \end{cases}$ |
| 4. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$ | 10. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^4 \end{cases}$ | 16. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ x \mapsto \cos(x) + \sin(x) \end{cases}$ |
| 5. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ | 11. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5 \end{cases}$ | 17. $f : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n+1 \end{cases}$ |
| 6. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ | 12. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ | |

Exercice 5. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle une bijection ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. L'application f est-elle injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ? Surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?
2. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection.

Exercice 7. Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

1. Étudier la fonction f . On note \mathcal{D}_f son domaine de définition.
2. L'application f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} ? Surjective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} ?
3. Montrer que la restriction $g : [2, +\infty[\rightarrow]-\infty, -4]$ est une bijection.

Exercice 8. Soit f une application définie par $f(x) = \frac{x-1}{1-2x}$. Montrer que f est bijective de \mathcal{D}_f sur un sous ensemble de \mathbb{R} à déterminer et déterminer f^{-1} .

Exercice 9. Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Sur quels intervalles f est-elle une bijection? Déterminer alors la bijection réciproque sur l'intervalle contenant 1.

Exercice 10. Montrer que l'application $f : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur un sous ensemble à déterminer. Donner la bijection réciproque.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \max\left(\frac{x+5}{10}, x-3\right)$. L'application f est-elle injective? Surjective? Bijective? Si oui, déterminer son application réciproque.

Exercice 12. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{cases}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}$ avec $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ définie par $f(z) = \frac{z}{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{U}, f(u) = u$ et en déduire que f est surjective.
2. La fonction f est-elle injective?

III Injection, surjection, bijection sur des exemples abstraits

Exercice 14. Montrer que la composée de deux injections est une injection et que la composée de deux surjections est une surjection.

Exercice 15. Soit E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 16. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Exercice 17. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. On considère l'application h définie par

$$h : \begin{cases} E & \rightarrow & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)). \end{cases}$$

1. Montrer que : $(f \text{ est injective ou } g \text{ est injective}) \Rightarrow (h \text{ injective de } E \text{ dans } F \times G)$.
2. On suppose que f est surjective de E dans F et que g est surjective de E dans G . L'application h est-elle nécessairement surjective de E dans $F \times G$?

Exercice 18. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.