TD 10 Matrices

I Calculs : opérations élémentaires sur les matrices

Exercice 1. *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. *Calculer, lorsque cela est possible,* $A+B$, AB, BA, A^2, AC, ${}^tB{}^tA$, CA, C^2, $(C-2I_3)^3$, XB *et* ${}^tBX$.
2. *Résoudre l'équation, d'inconnue* X : $CX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Représenter la matrice* A *dans les cas suivants :*

1. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2,\ a_{ij} = \max(i,j)$
2. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2,\ a_{ij} = |i-j|$
3. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2,\ a_{ij} = 1$ *si* $i \leq j$, $a_{ij} = 0$ *sinon.*

II Puissances n-ièmes de matrice carrée

Exercice 3. *Soient les deux matrices suivantes :* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* B^3. B *est-elle inversible ?*
2. *Calculer les puissances n-ièmes de* C.

Exercice 4. *On considère la matrice*

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* N^2. *Donner une relation entre* N^2, N *et* I_3. N *est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.*
2. *Montrer qu'il existe deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I.$$
3. *En déduire* u_n *et* v_n *en fonction de* n. *Puis donner l'expression de* N^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
4. *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites de réels telles que* $x_0 = y_0 = 1$ *et* $z_0 = 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} & = & -x_n + 2y_n. \end{array}\right.$$
Calculer x_n, y_n *et* z_n *en fonction de* n.

Exercice 5. *Soient les deux matrices suivantes :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer des réels* α *et* β *tels que* $A = \alpha I_3 + \beta J$. *Calculer* J^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *En déduire* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites de réels telles que* $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n. \end{cases}$$
Calculer x_n, y_n *et* z_n *en fonction de* n.

Exercice 6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* A^n *est de la forme*
$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$
2. *Déterminer* a_n *et* b_n *en fonction de* n.

Exercice 7. *Méthode par diagonalisation :*

1. *Soit* A *une matrice carrée diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe* P *une matrice inversible telle que* $P^{-1}AP = D$ *où* D *est diagonale.*
   (a) *Exprimer* A *en fonction de* D.
   (b) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Calculer* A^n *en fonction de* P, P^{-1} *et* D^n.
   (c) *Montrer que* A *inversible si et seulement si* D *est inversible et, qu'on a alors :* $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
2. *Application : soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) *Vérifier que* P *est inversible et calculer* P^{-1}.
   (b) *Vérifier que* M *est diagonalisable et calculer la matrice diagonale associée.*
   (c) *Étudier l'inversibilité de* M.
   (d) *Calculer* M^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Résoudre, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *le système :* $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$ *avec* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. *Montrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}. *Calculer* $P^{-1}AP$.
3. *En déduire* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
4. *La matrice* A *est-elle inversible ?*
5. *On considère trois suites* u, v *et* w *définies par*
$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - w_n \\ v_{n+1} &= v_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2v_n + w_n. \end{cases}$$
Donner l'expression explicite de chacune de ces trois suites.

Exercice 9. *Soient* $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Résoudre, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *le système :* $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$ *avec* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. *Montrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}. *Calculer* $P^{-1}AP$.
3. *En déduire* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
4. *La matrice* A *est-elle inversible ?*
5. *On considère une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n. \end{cases}$
   (a) *On pose :* $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. *Donner la relation qui lie* X_{n+1}, X_n *et* A *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   (b) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.
   (c) *En déduire l'expression explicite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III Inversibilité de matrice carrée

Exercice 10. *Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :*

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 11. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.
Étudier l'inversibilité de A *selon les valeurs prises par le paramètre* $a \in \mathbb{R}$. *Lorsque* A *est inversible, calculer son inverse en fonction de* a.

Exercice 12. *On considère le système* $\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

1. *Écrire le système sous forme matricielle.*
2. *En notant* A *la matrice associée au système, montrer que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Résoudre le système.*

Exercice 13. *Calcul de rang :*

Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le rang de $A = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5-\lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 14. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer A^2 et l'écrire en fonction de A et de I_3.*
2. *A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.*

Exercice 15. *Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.*

1. *$M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^4 - 4M^2 + M - 5I_3 = 0_3$.*
2. *$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0_3$ et telle que $A^4 \neq I_3$.*

Exercice 16. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.*
2. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Exercice 17. *Soient a, b, c, d des réels non tous nuls. On considère la matrice* $M = \begin{pmatrix} a & -d & c & -b \\ d & a & -b & -c \\ -c & b & a & -d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.

1. *Calculer le produit matriciel ${}^tM \times M$.*
2. *M est-elle inversible ? Si oui, calculer M^{-1}.*

Exercice 18. *Inversibilité des matrices carrées d'ordre deux.*
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que $M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I_2$.*
2. *En déduire une condition nécesaire et suffisante pour que M soit inversible et déterminer alors M^{-1}. On posera $\Delta = ad - bc$.*

Exercice 19. *Inversibilité des matrices de rotation.*
Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{R}$ est un élément de $\mathcal{R}$.*
2. *Montrer que deux matrices de $\mathcal{R}$ commutent.*
3. *Montrer que $I_2 \in \mathcal{R}$.*
4. *Montrer que tout élément de $\mathcal{R}$ est inversible et que son inverse est encore dans $\mathcal{R}$.*

IV Divers

Exercice 20. *Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on appelle trace de A le nombre :* $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. *Calculer la trace de la matrice nulle, de la matrice identité et de la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. *Vérifier que* $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(\lambda A+\mu B)=\lambda Tr(A)+\mu Tr(B)$.
3. *Montrer que* $\forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(AB)=Tr(BA)$.
4. *Les matrices* A *et* B *sont dites semblables s'il existe une matrice* P *inversible telle que* $B = P^{-1}AP$. *Montrer que deux matrices semblables ont même trace.*

Exercice 21. *Commutant. On cherche à déterminer le commutant de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, c'est-à-dire l'ensemble des matrices* A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *qui vérifient :*

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM=MA.$$

Cela revient à chercher les matrices A *qui commutent avec toutes les autres matrices. Soit* A *une telle matrice.*

1. *Soit* D *une matrice diagonale d'ordre* n. *Expliciter* AD *et* DA *et en déduire que* A *est diagonale.*
2. *Soit* $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Expliciter* MA *et* AM *et en déduire que tous les coefficients de* A *sont égaux.*
3. *Décrire le commutant de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 22. *Résolution d'équation matricielle.*
Déterminer toutes les matrices M *carrée d'ordre deux telles que* $M^2=0$.

V Exercices récapitulatifs

Exercice 23. *Soit* $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$. *On cherche à étudier l'inversibilité de* A *et à calculer les puissances n-ièmes de* A *en utilisant les diverses méthodes vues en cours et en TD.*

1. *Méthode une : Par diagonalisation :*
   (a) *Résoudre* $(A-\lambda I_3)X=O_{31}$.
   (b) *On pose* $P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. *Montrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}.
   (c) *Calculer* $P^{-1}AP$. *En notant* D *cette matrice, exprimer* A *en fonction de* P, P^{-1} *et* D.
   (d) *Calculer les puissances n-ièmes de* A.
   (e) *Étudier l'inversiblité de* A. *Si* A *est inversible, calculer son inverse.*
2. *Méthode deux : Par le binôme de Newton :*
   (a) *Soit* $B=A-2I_3$. *Calculer* B^n *en fonction de* B *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.
   (b) *En déduire alors les puissances n-ièmes de* A.
3. *Méthode trois : Lorsque l'on connaît une relation entre les puissances de la matrice :*
   (a) *Montrer que :* $A^2-3A+2I_3=0_3$.
   (b) *Montrer qu'il existe deux suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on ait :* $A^n=a_nA+b_nI_3$.
   (c) *Calculer les expresions explicites de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *En déduire les puissances n-ièmes de* A.
   (d) *Montrer que* A *est inversible et donner son inverse en fonction de* A *et de* I_3.
   (e) *En reprenant la question précédente, donner l'expression de* A^{-n} *en fonction de* A *et de* I_3 *pour tout entier naturel* $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 24. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. *On désigne par* I_3 *la matrice identité d'ordre 3 et par* 0_3 *la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de* A *de plusieurs manières. Ainsi, les trois méthodes sont totalement indépendantes les unes des autres et aucun résultat d'une méthode précédente ne peux être utilisé dans une autre méthode.*

1. ***Méthode une :*** *On pose* $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) *Démontrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}.
   (b) *Calculer* $D = P^{-1}AP$ *puis exprimer* A *en fonction de* P, D *et* P^{-1}.
   (c) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *donner et démontrer l'expression de* A^n *en fonction de* P, D^n *et* P^{-1}. *Calculer* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   (d) *Étudier l'inversibilité de* A *et calculer* A^{-1} *si* A *est inversible.*
2. ***Méthode deux :***
   (a) *On pose* $B = A - 2I_3$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$, *calculer* B^n *en fonction de* B.
   (b) *En déduire l'expression de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *en fonction de* n, A *et* I_3. *Vérifier que l'on retrouve bien le même résultat que dans la méthode précédente.*
   (c) *On définit les trois suites réelles* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui vérifient les relations*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 7y_n + 3z_n \\ z_{n+1} &= 6x_n - 6y_n + 2z_n. \end{cases}$$

   i. *Montrer que pour tout entier naturel* n, *on a :*

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

   ii. *En déduire, pour tout entier naturel* n, *une expression de* x_n, y_n *et* z_n *en fonction de* n *et des réels* x_0, y_0 *et* z_0.
   iii. *Si* $x_0 = y_0 = 1$ *et* $z_0 = 2$, *les suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont-elles convergentes ? Préciser les limites lorsqu'elles existent.*
3. ***Méthode trois :***
   (a) *Donner une relation entre* A^2, A *et* I_3.
   (b) *La matrice* A *est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.*
   (c) *Démontrer qu'il existe deux suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que, pour tout entier* n : $A^n = a_nA + b_nI_3$. *Donner les relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.*
   (d) *En déduire l'expression de* a_n *et de* b_n *en fonction de* n *puis celle de* A^n *en fonction de* n, A *et* I_3. *Vérifier que l'on retrouve bien le même résultat que dans les deux méthodes précédentes.*
   (e) *En reprenant l'expression de l'inverse de* A *en fonction de* A *et de* I_3, *calculer* $A^{-n} = (A^{-1})^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.