Table des matières

CH 10 : Matrices

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ représente soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

I Généralités : notations, définitions

I. 1 Définitions

Matrices, ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:

Définition 1. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ ....

  ....

- Si A est une telle matrice, on note $a_{ij} \in \mathbb{K}$ le coefficient de la i-ème ligne et j-ième colonne. Ainsi, dans le cas général, on a :
- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté ....

Exemples. • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$. On a alors

- $B = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1+3i \\ 3 & -4+7i & -5i \\ 8-i & -i & 6+i \\ 2+6i & -9+i & 1+4i \end{pmatrix}$. On a alors

Exercice 2. Donner des matrices A, B et C telles que $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{R})$.

Matrices carrées, ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Définition 3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
- Si $n = p$, on dit que la matrice est ....
- L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté ....

Exemples.
- Exemple d'une matrice carrée réelle de taille 2 :
- Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

Matrices lignes, matrices colonnes :

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
- Si A est une matrice à n lignes et 1 colonne, on dit que A est ....
  On note alors $A =$ et on a $A \in$ ....
- Si A est une matrice à 1 ligne et n colonnes, on dit que A est ....
  On note alors $A =$ et on a $A \in$ ....

Exemples.

Égalité entre deux matrices :

Définition 5. Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\ldots n, j=1\ldots p}$ et $B = (a_{i,j})_{i=1\ldots n, j=1\ldots p}$

On dit que les deux matrices A et B sont égales si et seulement si

- ....
- ....

I. 2 Matrices particulières

Matrices diagonales :

Définition 6. Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est diagonale si ....
A est donc de la forme

Exemples.

Matrices triangulaires :

Définition 7. Matrices triangulaires :

- Une matrice carrée $A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est triangulaire supérieure si ....
  A est donc de la forme

- Une matrice carrée $A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est triangulaire inférieure si ....
  A est donc de la forme

Exemples.

Remarques.

- Une matrice diagonale est donc une matrice qui est ....
- D'une façon générale, les termes $a_{i,i}$ d'une matrice carrée sont appelés ....

Matrices nulles et matrices identités :

Définition 8. Soient (n,p) deux entiers naturels non nuls.

- La matrice de taille $n\times p$ dont tous les coefficients sont est appelée la matrice nulle.

  Elle est notée ....ou ....s'il n'y a pas d'ambiguïté.

- La matrice ....est appelée la matrice identité de taille n.

  Elle est notée ....

Exemples.

$0_{23}=$ $I_2=$ $I_3=$ $0_{14}=$

Matrices élémentaires :

Définition 9. Soient les entiers naturels non nuls (n,p) fixés.

- Pour tous $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, on note $E_{ij}\in\mathcal{M}_(\mathbb{K})$ la matrice ....

  ....
- Les matrices E_{ij} sont appelées les ....

Exemples. On se place ici dans $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$. Donner toutes les matrices élémentaires.

Transposée d'une matrice, Matrices symétriques et anti-symétriques :

Définition 10. Transposée d'une matrice :

Soit $A=(a_{i,j})_{i=1\dots n,j=1\dots p}\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de A et on note ......, la matrice $B=$ $\in\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ alors

La transposée d'une matrice s'obtient donc ....

Exemples. • Calculer la transposée de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

• Calculer la transposée de $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

> **Définition 11.** Matrices symétriques et anti-symétriques :
> - Une matrice est dite symétrique si ....
> - Une matrice est dite anti-symétrique si ....

Exemples. • Donner deux exemples de matrices symétriques :

• Donner deux exemples de matrices anti-symétriques :

• Donner un type de matrice toujours symétrique : ....

Remarques. • Les matrices symétriques sont forcément ....

• Propriétés des matrices anti-symétriques :

⋆ Les matrices anti-symétriques sont forcément ....

⋆ ....

II Opérations élémentaires dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

II. 1 Somme de deux matrices de même taille

Définition de la somme de deux matrices :

> **Définition 12.** Sommes de matrices :
> Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
> On note $A + B$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $A + B =$

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$.

⚠ ....

Propriétés de la somme :

❶ **Associativité :** $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$,

❷ **Commutativité :** $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

❸ **Somme et transposée :** $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

II. 2 Multiplication par un scalaire

Définition de la multiplication d'une matrice par un scalaire :

Définition 13. Multiplication par un scalaire :
Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\ldots n, j=1\ldots p}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On note λA la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\lambda A =$

Exemples. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $5A$ et $-2A + 3B$.

Propriétés de la multiplication par un scalaire :

❶ **Associativité :** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$

❷ **Distributivité :** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,$ $\begin{cases} \lambda(A+B) & = \\ (\lambda+\mu)A & = \end{cases}$

❸ **Multiplication par 0 :** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$

❹ **Multiplication et transposée :** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$

III Produit matriciel

III. 1 Produit matriciel : définition

Exemples. • On définit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons AB.

- On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons AB puis BA.
- On définit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$. Calculons AB.

Définition 14. Soient $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ trois entiers naturels non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})_{i=1\ldots n, j=1\ldots p}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\ldots p, j=1\ldots q}$.
Le produit AB de la matrice A par la matrice B est la matrice $C \in$ .... définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, q]\!]\ c_{ij} =$$

⚠ Le produit matriciel $A \times B$ n'est défini que si ....

Exercice 15. Calculer tous les produits de deux matrices possibles avec les quatre matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$

Remarques. • Le produit matriciel AB peut exister sans que ....

- Même si AB et BA existent, ...
- Cas particulier des matrices carrées de même taille : ....

....

⚠ ....

Exemple. Multiplication matrice-vecteur et lien avec les sytèmes linéaires. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer AX. Mettre sous forme matricielle le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$.

III. 2 Propriétés

Proposition 16. Soient $(n,p,q,r) \in \mathbb{N}^4$ des entiers naturels non nuls. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.
Pour tout couple de matrices $(A,B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})^2$, tout couple de matrices $(C,D) \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})^2$ et toute matrice $E \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{R})$, on a :

- **Distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition :**

- **Distributivité du produit matriciel par rapport à la multiplication par un scalaire :**

- **Associativité du produit matriciel :**

- **Elément neutre et produit matriciel :**

- **Produit matriciel et transposition :**

⚠ Les propriétés habituelles du produit sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ ne s'appliquent pas du tout au produit matriciel. Donnons quelques exemples :

Remarques.

- Deux matrices NON NULLES peuvent avoir un produit NUL. Calculer AB avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$:
- La règle de simplification par un facteur non nul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ne s'applique pas du tout aux matrices. On peut très bien avoir $AB = AC$ ....
  Calculer AB et AC avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$:
- Le produit matriciel ....
  Calculer AB et BA avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
- Les identités remarquables et le binôme de Newton sont en général faux avec des matrices car on utilise pour les démontrer la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Soient $(A,B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$.

  $(A+B)^2 =$ $\qquad$ $(A-B)(A+B) =$ $\qquad$ $(A+B)^3 =$

- Les propriétés usuelles dans $\mathbb{R}$ avec les puissances sont aussi en générale fausses avec les matrices toujours à cause de la non commutativité du produit matriciel.
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$(AB)^3 = \qquad\qquad\qquad A^3B^3 =$$

III. 3 Cas particuliers des matrices diagonales et triangulaires supérieures

Proposition 17. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
- Le produit de deux matrices diagonales est ....
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est ....
- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est ....

Exemples. Calculer le produit des matrices dans les 3 cas suivants :
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

IV Puissances n-ièmes de matrices carrées

On se place dans toute cette section dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ ensemble des matrices carrées de taille r, $r \in \mathbb{N}^\star$. Ainsi tous les produits matriciels ont bien un sens.

IV. 1 Définition

Proposition 18. Soient $n \in \mathbb{N}$ et A une matrice carrée non nulle de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On définit A^n matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ pour tout entier naturel n par la récurrence suivante

$$\begin{cases} A^0 = \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+1} = \end{cases}$$

Exercice 19.
- Calculer I_r^n et $(\lambda I_r)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 puis $(\lambda A)^3$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

IV. 2 Matrices dont on sait calculer facilement la puissance n-ième

Matrices diagonales :

Proposition 20. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ une matrice carrée diagonale. On a :

$$A^n =$$

Exercice 21. Calculer les puissances n-ièmes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Matrices nilpotentes :

Définition 22. Soit $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
On dit que A est une matrice nilpotente ....

On connaît facilement les puissances d'une matrice nilpotente car ....

Exemples. • ....

• ....

Exercice 23. Calculer les puissances n-ièmes de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrices ayant les mêmes coefficients :

Exemple. Calculer B^n avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

IV. 3 Identité remarquable, binôme de Newton

Lorsque deux matrices A et B commutent c'est-à-dire lorsqu'elles vérifient $AB = BA$, on retrouve certaines propriétés usuelles sur $\mathbb{R}$.

Proposition 24. Soient A et B deux matrices qui commutent $AB = BA$, on a alors :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ (AB)^n =$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n =$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n - B^n =$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n - I_r =$

IV. 4 Méthodes usuelles de calcul de puissances n-ièmes de matrice

Méthode 1 : avec la formule du binôme de Newton

Méthode pour calculer A^n avec le binôme de Newton :

- On écrit $A = B + C$ avec $(B, C) \in (\mathcal{M}_r(\mathbb{K}))^2$ des matrices qui vérifient :
  ⋆ Elles commutent entre elles : $BC = CB$.
  ⋆ On connaît leurs puissances n-ièmes (matrices diagonales ou nilpotentes ou ayant les mêmes coefficients : on connaît pour tout $k \in \mathbb{N}$, B^k et C^k).
- On utilise alors la formule du binôme de Newton :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$ et on utilise alors l'expression connue de B^k et de C^{n-k}.

Exercice 25. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n$.

Exercice 26. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n$.

Méthode 2 : par récurrence si on connaît une relation entre les petites puissances de la matrice

Méthode pour calculer A^n quand on connaît une relation entre les petites puissances de A :

- On calcule une relation entre par exemple $A^2,\ A$ et I_r (ou entre $A^3,\ A^2,\ A$ et I_r...).
- On démontre par récurrence l'existence d'une ou plusieurs suites permettant d'exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et de I_r.
- La récurrence nous donne alors la relation de récurrence vérifiée par ces suites.
- De cette relation, on en déduit l'expression explicite des suites.
- On en déduit l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = a_nA + b_nI_3$.
3. Donner l'expression explicite de ces deux suites et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 3 : Par diagonalisation ou trigonalisation (voir en TD)

IV. 5 Application à l'étude de suites

Le calcul matriciel permet de donner l'expression explicite (c'est-à-dire en fonction de n) de suites récurrentes lorsque plusieurs suites sont définies par récurrence les unes en fonction des autres ou de suites récurrentes linéaires d'ordre trois.

Exercice 28. Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 2w_n. \end{cases}$

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $MX_n = X_{n+1}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = M^nX_0$.
3. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire les expressions explicites de u_n, v_n et w_n, puis leurs limites.

V Matrices carrées inversibles

Une matrice NON carrée ne peut pas être inversible. On se place donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

V. 1 Définition et propriétés

Définition

Définition 29. Définition d'une matrice inversible :

- Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ....

- La matrice B est alors notée ...... et s'appelle ....

Exemples. • Étude de l'inversibilité de I_n : ....

- Étude de l'inversibilité de 0_n : ....
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $-A$ est son inverse.

Remarques. • Si A est inversible et que l'on a : $AB = AC$ alors ....

- Si A est inversible et que l'on a : $AB = 0_n$ alors ....

Propriétés élémentaires

Proposition 30. Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\star$. Alors :

- $(A^{-1})^{-1} =$ ....
- $(AB)^{-1} =$ ....
- $(A^k)^{-1} =$ ....
- $(\lambda A)^{-1} =$ ....
- $({}^tA)^{-1} =$ ....

Démonstration. □

V. 2 *Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires supérieures*

Inversibilité des matrices diagonales et inverse

Proposition 31. Inversibilité des matrices diagonales et inverse :

- Une matrice diagonale $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ est inversible ....

  ....

- Son inverse est alors donné par :

Exemples. Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inversibilité des matrices triangulaires

Proposition 32. Une matrice triangulaire est inversible ....

....

⚠ Il n'y a pas de formule générale pour l'inverse.

Exemples. Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

V. 3 Inversibilité des matrices dont on connaît une relation entre les petites puissances

Lorsque l'on connaît une relation entre une matrice A et ses petites puissances (A^2, A^3...), on sait facilement si la matrice est inversible ou pas et dans le cas où elle est inversible, on connaît tout de suite l'inverse.

Méthode pour étudier l'inversibilité quand on connaît une relation entre les petites puissances :

- Cas d'inversibilité :
  - ⋆ Si, dans la relation entre les puissances de la matrice A, la matrice I_r est présente, alors A est inversible.
  - ⋆ Pour trouver A^{-1}, on met A en facteur et on écrit : $AC = I_r$ alors $A^{-1} = C$ par définition de l'inversibilité.
- Cas de non inversibilité :
  - ⋆ Si, dans la relation entre les puissances, la matrice I_r n'est pas présente, alors A n'est pas inversible.
  - ⋆ Pour le montrer, on utilise un raisonnement par l'absurde.

Exercice 33.
- Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^2 = -M + 2I_3$. En déduire que M est inversible et calculer son inverse.
- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 3A$ puis que la matrice A n'est pas inversible.

V. 4 Matrices et systèmes linéaires

Écriture matricielle d'un système linéaire

Proposition 34. Écriture matricielle d'un système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n. \end{array}\right. \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

La matrice A est appelée ....

Exemple. L'écriture matricielle du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ 6x & + & 8y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$ est

Rang d'une matrice

Définition 35. Rang d'une matrice :

On appelle rang d'une matrice A, noté ....

Méthode pour calculer le rang d'une matrice :
On utilise directement sur la matrice la méthode du pivot de Gauss (sans revenir au système associé).

Exercice 36. Donner le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Inversibilité d'une matrice

Proposition 37. Soient $\mathcal{S}$ un système de n équations à n inconnues et A la matrice qui lui est associée.

- Le système est de Cramer si et seulement si ....
- De plus, dans ce cas, l'expression de l'unique solution de $AX = Y$ est ....

Proposition 38. Lien avec le rang. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si : ....

Exercice 39. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & \alpha \\ 3x & + & 4y & = & \beta \end{array} \right.$ et en déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer l'inverse d'une matrice A revient donc à résoudre le système linéaire $AX = Y$ pour arriver à $X = A^{-1}Y$, et ainsi identifier les coefficients de A^{-1}. En pratique, on utilise la méthode du pivot de Gauss directement sur les matrices, en remarquant que l'on peut réécrire notre résolution du système sous la forme :

$$AX = I_nY \Leftrightarrow I_nX = A^{-1}Y.$$

Ainsi, si l'on arrive à passer de la matrice A à la matrice I_n grâce à la méthode du pivot de Gauss, les mêmes opérations permettront de passer de la matrice I_n à la matrice A^{-1}.

- On part de la matrice $(A|I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On effectue les opérations élémentaires classiques sur les LIGNES.

BUT Transformer la partie gauche de la grosse matrice, à savoir A, en I_n.

- ⋆ Toujours possible si A est inversible et on connaît A^{-1} car : $(A|I_n) \underset{\text{opérations}}{\longrightarrow} \left(I_n|A^{-1}\right)$.
- ⋆ Impossible si $\mathrm{rg}(A) < n$, et dans ce cas la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 40. Reprendre les matrices de l'exercice précédent, et calculer l'inverse des matrices inversibles.

Exercice 41. Étudier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et calculer son inverse si elle est inversible.

V. 5 Cas particulier des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition 42. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est défini par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

Exercice 43. Calculer le déterminant des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Proposition 44. Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible ....
Son inverse est alors donnée par : $A^{-1} =$

Exercice 45. Étudier l'inversibilité des matrices A et B de l'exercice précédent, et calculer leur inverse si elle existe.

Proposition 46. Le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}\right.$ admet une unique solution
La solution est alors donnée par : $x =$ et $y =$

Exercice 47. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & 3y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}\right.$.