

Programme de colle : Semaine 12

Lundi 3 Janvier

I Logique et vocabulaire des ensembles

1. Manipulation simple des quantificateurs
2. Négation d'une proposition
3. Raisonnement par l'absurde et par contraposée.
4. Ensemble des parties d'un ensemble.
5. Partition d'un ensemble, raisonnement par disjonction de cas.

II Vocabulaire des applications

1. Fonction caractéristique (ou indicatrice) d'un ensemble dans un autre.
2. Image directe d'un ensemble par une application.
3. Composée d'applications
4. Application injective et surjective.
5. Théorème des valeurs intermédiaires.
6. Fonction strictement croissante alors injective.
7. Théorème de la bijection.

III Matrices

1. Calcul sur les matrices : additions, multiplications. (Tous les exercices se feront sur des matrices de taille $n \times m$, avec $n, m \leq 4$)
2. Rang d'une matrice.
3. Matrice inversible et calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss.
4. Système linéaire associé à une matrice ($AX = 0$)

IV Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if`, `elif`, `else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.

V Exercices Types

1. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$(|z_1| < 1 \text{ et } |z_2| < 1) \implies z_1 z_2 \neq 1$$

L'implication réciproque est-elle vraie ?

2. Ecrire avec des quantificateurs :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- La fonction f est croissante sur I
- La fonction f ne s'annule jamais.

3. Que dire d'une fonction continue, croissante et périodique ?

4. Sans utiliser la fonction floor de Python, écrire une fonction Python qui prend en argument un réel x l'entier k tel que $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$

5. Sans utiliser la fonction floor de Python, écrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et retourne sa partie entière.

6. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n qui simule n lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.

7. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer B^T .

(b) Calculer $-2A$

(c) Calculer $-2A + B^T$

8. Soit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer J^2 et J^3

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

9. Soit

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le rang de A_λ en fonction de λ .

(b) Donner l'inverse de A_λ quand cela a un sens.