DM 11 : Correction

Exercice 1. *Pour tout réel $t > 0$, on note P_t le polynôme $X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de P_t en fonction de $t > 0$.*

1. *On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que P_t admet une unique racine notée $f(t)$.*
2. *Montrer que $f(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.*
3. *Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*
4. *En déduire que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.*
5. *Déterminer $\lim_{t\to 0^+} f(t)$.*
6. *Déterminer $\lim_{t\to +\infty} f(t)$.*
7. *En déduire $\lim_{t\to +\infty} tf(t) = 1$. (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)*
8. *Justifier que f est la bijection réciproque de $g :]0, 1[\to]0, +\infty[$ $x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$*
9. (a) *Justifier que f est dérivale sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.*
   (b) *En déduire la limite de $f'(t)$ en 0. Calculer la limite de $t^2 f'(t)$ en $+\infty$ (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)*

Correction.

1. On considère la dérivée de la fonction polynomiale. On a $P_t'(X) = 5X^4 + t$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$ $P_t'(x) \geq 0$. La fonction polynomiale $x \mapsto P_t(x)$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par ailleurs elle est continue. On peut appliquer le théorème de la bijection à P_t pour la valeur $0 \in]\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} P_t(x) = -\infty[$. Il existe donc une unique valeur, notée $f(t)$ par l'énoncé, telle que $P_t'(f(t)) = 0$.
2. Par définition de P_t on a $P_t(0) = -1 < 0$ et $P_t(1) = t > 0$. Comme $x \mapsto P_t(x)$ est strictement croissante et $P_t(f(f)) = 0$ on obtient $f(t) \in]0, 1[$.
3. Soit $t_1 > t_2$, on a $P_{t_1}(X) - P_{t_2}(X) = X^5 + t_1X - 1 - (X^5 + t_2X - 1) = (t_1 - t_2)X$ Donc pour $x > 0$ on a
$$P_{t_1}(x) - P_{t_2}(x) > 0$$
On applique ce résultat à $f(t_2)$ on obtient
$$P_{t_1}(f(t_2)) - P_{t_2}(f(t_2)) > 0$$
$$P_{t_1}(f(t_2)) > 0$$
Comme $x \mapsto P_{t_1}(x)$ est une fonction croissant et que $P_{t_1}(f(t_1)) = 0$ on obtient $f(t_2) > f(t_1)$ Finalement $t \mapsto f(t)$ est décroissante.
4. f est montone et bornée. Le théorème des limites monotones assure que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
5. Notons ℓ la limite $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell$. Par définition de f on a $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$. Cette expression admet une limite quand $t \to 0$, on a $\lim_{t\to 0^+} f(t)^5 + tf(t) - 1 = \ell^5 - 1$. Par unicité de la limite on a donc $\ell^5 - 1 = 0$. Et donc $\ell = 1$ (car ℓ est réel).

6. Notons ℓ' la limite $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell'$. Supposons par l'absurde que cette limite soit non nulle. On a alors $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty$. En passant à la limite dans l'égalité $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ on obtient $+\infty = 0$ ce qui est absurde. Donc

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

7. En repartant de l'égalité $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ on obtient

$$tf(t) = 1 - f(t)^5$$

Comme $lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ on a

$$\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 1$$

En d'autres termes $f(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t}$

8. f est strictement montone sur $]0,+\infty[$ donc f est une bijection $]0,+\infty[$ sur son image. $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Donc $f(]0,+\infty[) =]0,1[$ et f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.
Par définition de f on a $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ Donc $tf(t) = -f(t)^5 + 1$. Comme $f(t) > 0$, on a :

$$t = \frac{1 - f(t)^5}{f(t)}$$

Soit $g(x) = \frac{1-x^5}{x}$ on a bien $g(f(t)) = t$ Donc $g \circ f = \mathrm{Id}$. Ainsi la réciproque de f est bien la fonction $g :]0,1[\to]0,\infty[$.

9. (a) g est dérivable et pour tout $x \in]0,1[$

$$g'(x) = \frac{-1-4x^5}{x^2}.$$

$g'(x)$ est différent de 0 car $-1-4x^5$ est différent de 0 sur $]0,1[$, donc f est dérivable et

$$f'(t) = \frac{1}{g'(f(t)} = \frac{f(t)^2}{-1-4f(t)^5}.$$

(b) $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$ donc

$$\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{1^2}{-1-4\times 1} = \frac{-1}{5}$$

On a aussi $t^2 f'(t) = \frac{(tf(t)^2}{-1-4f(t)^5}$ Comme $\lim_{t\to\infty} tf(t) = 1$ et $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ en passant à la limite dans l'égalité précédente on obtient :

$$\lim_{t\to\infty} t^2 f'(t) = \frac{1}{-1} = -1$$

En d'autres termes :

$$f'(t) \sim_{+\infty} \frac{-1}{t^2}$$

□

Exercice 2. *On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$T_0 = 1 \quad et \quad T_1 = X \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N},\, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. (a) *Calculer T_2, T_3 et T_4.*
   (b) *Calculer le degré et le coefficient de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (c) *Calculer le coefficient constant de T_n.*
2. (a) *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.*
   (b) *En déduire que $\forall x \in [-1,1]$, on a $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.*
3. (a) *En utilisant la question 2a), déterminer les racines de T_n sur $[-1,1]$.*
   (b) *Combien de racines distinctes a-t-on ainsi obtenues ? Que peut on en déduire ?*
   (c) *Donner la factorisaiton de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Correction.

1. (a) $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$
   (b) Montrons par récurrence que $\deg(T_n) = n$. Comme la suite est une suite récurrente d'ordre 2, on va poser comme proposition de récurrence

$$P(n) :' \deg(T_n) = n \text{ ET } \deg(T_{n+1}) = n+1'$$

   C'est vrai pour $n = 0, 1, 2$ et 3. On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vrai et montrons $P(n_0+1)$. On cherche donc à vérifier $\deg(T_{n_0+1}) = n_0+1$ ET $\deg(T_{n_0+2}) = n_0 + 2'$. La première égalité est vraie par hypothèse de récurrence. La seconde vient de la relation $T_{n_0+2} = 2XT_{n_0+1} - T_{n_0}$ En effet, par hypothèse de récurrence T_{n_0+1} est de degré n_0+1 donc $2XT_{n_0+1}$ est de degrés n_0+2. Comme $\deg(T_{n_0}) = n_0 < n_0+2$, on a

$$\deg(T_{n_0+2}) = \max(\deg(2XT_{n_0+1}), \deg(T_{n_0})) = n_0 + 2$$

   Ainsi par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
   (c) La récurrence précédente montre que le coefficient dominant, notons le c_n vérifie $c_{n+2} = 2c_{n+1}$. Ainsi $c_n = 2^n c_0 = 2^n$.
2. (a) Montrons le résultat par récurrence. On pose

$$Q(n) : \text{"}\forall\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \text{ ET } T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)\text{"}$$

   $Q(0)$ est vraie par définition de T_0 et T_1
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vrai et montrons $Q(n+1)$. Il suffit de montrer que $\forall\theta \in \mathbb{R}$

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$$

   On a par définition de T_{n+2}

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$$

   Par hypothèse de récurrence on a $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$ et $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ donc

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

   Les formules trigonométriques donnent :

$$\begin{aligned} 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) &= \cos(\theta + (n+1)\theta) + \cos(\theta - (n+1)\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(-n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Donc

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$$

Par récurrence, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

On peut répondre maintenant facilement à la question 2c) (avec la faute de frappe coefficient constant au lieu de coefficient dominant). Le coefficient constant vaut $T_n(0) = T_n(\cos(\pi/2)) = \cos(n\pi/2)$

Donc $T_n(0) = 0$ pour $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, on a alors $T_{2k+1}(0) = \cos((2k+1)\pi/2) = \frac{(-1)^k}{2}$

(b) Soit $x \in [-1, 1]$ on note $x = \cos(\theta)$, avec $\theta \in [0, \pi]$ on a alors $\theta = \arccos(x)$. D'après la question précédente on a donc pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

3. (a) Pour tout θ tel que $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\cos(n\theta) = 0$
Ainsi pour tout θ tel que $\theta \equiv \frac{\pi}{2n}[\frac{\pi}{n}]$,

$$T_n(\cos(\theta)) = 0$$

On obtient ainsi n racines entre $[-1, 1]$ données par

$$\{\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right) \mid k \in [0, n-1]\}$$

(b) On a obtenu n racines. Comme T_n est de degrés n, on a obtenu toutes les racines, ainsi T_n se factorise de la manière suivante [1] :

(c)

$$T_n(X) = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right)\right)$$

$\square$

1. sans oublier le coéfficient dominant, merci Marie.