TD 10 : dénombrement

I Dénombrement

Exercice 1. Donner le nombre d'anagrammes de ananas.

Exercice 2. On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?

Exercice 3. Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

1. On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
   (a) Donner le nombre de résultats possibles.
   (b) Combien de ces résultats amènent
      i. exactement 1 jeton noir ?
      ii. au moins 1 jeton noir ?
      iii. au plus un jeton noir ?
      iv. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?
2. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
3. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

Exercice 4. Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il distribue 8 fruits différents (une pomme, une banane, ...). Combien y-a-t-il de distributions possibles
   (a) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
   (b) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes golden identiques.

Exercice 5. Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On suppose que les boules sont discernables et on effectue un tirage de 6 boules de cette urne successivement et avec remise.

1. Donner le nombre de résultats possibles.
2. Combien de ces résultats amènent
   (a) 5 boules blanches puis une boule noire dans cet ordre ?
   (b) exactement une boule noire ?
   (c) au moins une boule noire ?
   (d) plus de boules noires que de boules blanches ?

Exercice 6. Un jeu de cartes non truqué comporte 52 cartes. Une main est constituée de 8 cartes.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un as ?

3. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un coeur ou une dame ?
4. Quel est le nombre de mains possibles avec exactement un as et exactement un coeur ?
5. Quel est le nombre de mains possibles comportant des cartes d'exactement 2 couleurs ?
6. Quel est le nombre de mains possibles comportant deux couleurs au plus ?
7. Quel est le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent ?

Exercice 7. Une urne contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. On tire deux chaussures au hasard.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages où l'on obtient deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de tirages amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?

Exercice 8. Un tournoi de tennis comporte $2n$ joueurs. De combien de façons peut-on organiser le premier tour dans le cas où :

1. on s'intéresse à la fois aux joueurs qui sont opposés et à l'ordre des matches ;
2. on ne s'intéresse qu'à la connaissance des joueurs opposés.

Exercice 9. De combien de manières peut-on placer p jetons indiscernables sur un damier de côté n de sorte que deux jetons ne se trouvent ni sur une même colonne ni sur une même ligne ?

Exercice 10. Un vendeur de fenêtres téléphone successivement à n personnes parmi une population de N individus, une même personne pouvant être appelée plusieurs fois.

1. Combien y-a-t-il de possibilités pour que M. X soit appelé k fois ?
2. Combien y-a-t-il de possibilités pour que M. X soit appelé k fois au cours des r premiers appels ?
3. Combien y-a-t-il de possibilités pour que M. X soit appelé pour la k-ième fois au t-ième appel ?

Exercice 11. A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier à 12 touches : 3 lettres A, B et C et les 9 chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie de 3 chiffres.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien existe-t-il de codes
   (a) pour lesquels les 3 chiffres sont distincts ?
   (b) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   (c) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   (d) pour lesquels les 3 chiffres sont dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 12. 1. Combien y-a-t-il de nombres de r chiffres au plus ?

2. Combien y-a-t-il de nombres de r chiffres exactement ?
3. Combien y-a-t-il de nombres de r chiffres exactement et différents ?

Exercice 13. Combien y-a-t-il d'entiers inférieurs strictement à 10^p, $p \in \mathbb{N}^\star$ et dont la somme des chiffres est égale à 3 ?

Exercice 14. 1. Combien peut-on former de nombres de 6 chiffres distincts avec 1,2,3,4,5,6 ?

2. On les range par ordre croissant. Quel est le rang de 453216 ?
3. Calculer la somme de tous ces nombres.

Exercice 15. Soit $(p, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.

1. Combien y a-t-il de solutions $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbb{N}^\star)^p$ à l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$?
2. En déduire le nombre de solutions $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$. Retrouver ce résultat par un raisonnement direct.

II Formules démontrées à l'aide du dénombrement

Exercice 16. On considère un quadrillage $\mathbb{N}^2$ du quart de plan des points à coordonnées positives. On appelle chemin croissant tout parcours suivant le quadrillage en utilisant des déplacements vers le haut ou vers la droite.

1. Combien y-a-t-il de chemins croissants de longueur $n \in \mathbb{N}$? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ fixé.
   (a) Combien de chemins croissants permettent de relier $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$?
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq m+n$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$, dénombrer le nombre de chemins reliant A et B et passant par $C_k\begin{pmatrix} k \\ p-k \end{pmatrix}$. En déduire la formule de Vandermonde.

Exercice 17. Soient $p,\ q$ et r trois entiers naturels tels que $p+q+r \geq 1$.

1. Combien de mots de $p+q+r$ lettres peut-on former en utilisant p fois la même lettre A, q fois la lettre B et r fois la lettre C ? Vérifier le résultat avec $p = q = r = 1$.
2. Démontrer la formule : $(a+b+c)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\binom{n}{p}\binom{n-p}{q}a^p b^q c^{n-p-q}$.

Exercice 18. Soient $n,\ p$ et q trois entiers naturels. Le but de l'exercice est de démontrer la formule suivante :

$$\sum_{k=p}^{2p}\binom{k}{p}2^{2p-k} = 2^{2p}.$$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots de $p+q+1$ lettres prises dans l'ensemble $\{A, B\}$.

1. Calculer $\operatorname{Card}(\mathcal{M})$.
2. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ contenant au moins $p+1$ fois la lettre A. Etant donné un entier $k \in \{1, \ldots, q+1\}$, on note $\mathcal{N}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{N}$ dont le $p+1$-ième A se trouve en $p+k$-ième position. Déterminer $\operatorname{Card}(\mathcal{N}_k)$. En déduire $\operatorname{Card}(\mathcal{N})$ sous forme d'une somme.
3. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ contenant au moins $q+1$ fois la lettre B. Déterminer $\operatorname{Card}(\mathcal{R})$.
4. En déduire la formule : $\sum\limits_{k=0}^{q}\binom{p+k}{p}2^{q-k} + \sum\limits_{k=0}^{p}\binom{q+k}{q}2^{p-k} = 2^{p+q+1}$.
5. Conclure.

Exercice 19. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.
   Indication : discuter selon le nombre d'éléments de A.
2. En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.
3. En déduire le nombre de partitions de E à 3 éléments. Retrouver ce résultat par un raisonnement direct.