# Dichotomie

## I Dichotomie

Le but de ce TP est d'étudier la méthode de dichotomie, qui permet de calculer des valeurs approchées des zéros d'une fonction, c'est-à-dire de résoudre de façon approchée des équations du type $f(x) = 0$.

On considère une fonction $f$ à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) et qui s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note $\alpha$. On définit alors les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- Initialisation : $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Si $a_n$ et $b_n$ sont définis, on pose
  - ⋆ si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$ (c'est-à-dire si $\alpha$ est entre $a_n$ et $c_n$, ), on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$,
  - ⋆ sinon (c'est-à-dire si $\alpha$ est entre $c_n$ et $b_n$), on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

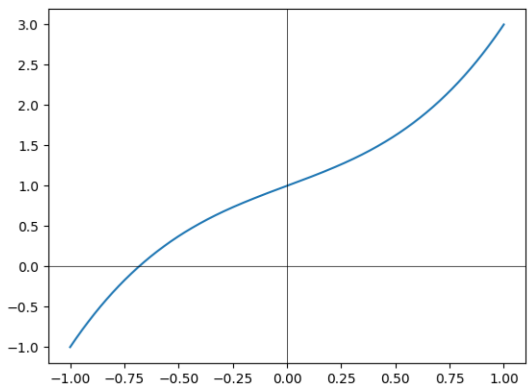
On peut montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et qu'elles convergent vers $\alpha$.

---

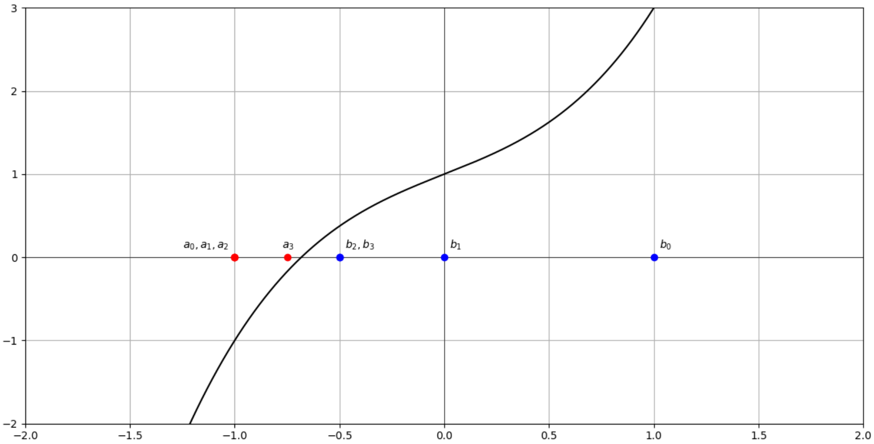
1. Étude d'un exemple : soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x^3 + x + 1$.
   (a) Écrire une fonction qui prend en argument $x$ et qui calcule $f(x)$.
   (b) Prouver (à la main) qu'il existe un unique réel $\alpha$ vérifiant $f(\alpha) = 0$, et que l'on a $\alpha \in [-1, 1]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
X=np.linspace(-1,1,1000)
Y=X**3+X+1
plt.plot(X,Y)
plt.grid() #affiche un cadrillage.
plt.show()
```

Vous devriez obtenir quelque chose qui ressemble à ca :




Reproduisez ce graphique sur une feuille et placez à la main les premières valeurs des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.




2. Créer une fonction que l'on nommera `dichotomie` qui a pour paramètres d'entrée $n$ et qui calcule $a_n$ et $b_n$.
3. Écrire un programme `limite_dichotomie` qui demande un réel `epsilon` et qui calcule une valeur approchée à `epsilon` près de la solution de $f(x) = 0$ sur $[-1, 1]$. Afficher le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la valeur approchée à la précision demandée.
4. Utiliser le programme de la question précédente pour donner une valeur approchée à $10^{-4}$ de la solution de $x^3+x+1 = 0$. (Vous devriez obtenir 16 itérations et une valeurs de $-0.682373046875$)

**Exercice 1.** En appliquant la même méthode, calculer à $10^{-4}$ l'unique solution de $\exp(-x^2) = x$ dans $\mathbb{R}$. (Il faut d'abord faire un peu de math pour trouver un intervalle borné dans lequel appartient la solution)

Vous devriez obtenir une solution de l'ordre de 0.6528930.