Programme de colle : Semaine 13
Lundi 10 Janvier

I Matrices

1. Calcul sur les matrices : additions, multiplications. (Tous les exercices se feront sur des matrices de taille $n \times m$, avec $n, m \leq 4$)
2. Rang d'une matrice.
3. Matrice inversible et calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss.
4. Déterminant d'une matrice 2×2 et formule de l'inverse ($n = 2$)
5. Système linéaire associé à une matrice ($AX = Y$)
6. Calcul des puissances n-émes d'une matrice, les exercices doivent etre guidés.

II Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if, elif, else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.
7. Bibliothéque matplolib.pyplot et numpy.
8. Savoir tracer un graphique.
9. Savoir définir une matrice - un tableau.

III Exercices Types

1. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x l'entier k tel que $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$
2. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et retourne sa partie entière.
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n qui simule n lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.
4. Tracer la fonction $f(x) = x^3 + 3x + 1$ entre -1 et 1 à l'aide de la bibliothéque matplotlib.pyplot.
5. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer B^T.
   (b) Calculer $-2A$
   (c) Calculer $-2A + B^T$
6. Soit
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer J^2 et J^3

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

7. Soit

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le rang de A_λ en fonction de λ.

(b) Donner l'inverse de A_λ quand cela a un sens.

8. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à étudier l'inversibilité de A et à calculer les puissances n-ièmes de A.

(a) Méthode une : Par diagonalisation :

i. Résoudre $(A - \lambda I_3)X = O_{31}$.

ii. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

iii. Calculer $P^{-1}AP$. En notant D cette matrice, exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D.

iv. Calculer les puissances n-ièmes de A.

v. Étudier l'inversiblité de A. Si A est inversible, calculer son inverse.

(b) Méthode deux : Par le binôme de Newton :

i. Soit $B = A - 2I_3$. Calculer B^n en fonction de B pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. En déduire alors les puissances n-ièmes de A.

(c) Méthode trois : Lorsque l'on connaît une relation entre les puissances de la matrice :

i. Montrer que : $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.

ii. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $A^n = a_n A + b_n I_3$.

iii. Calculer les expresions explicites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire les puissances n-ièmes de A.

iv. Montrer que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et de I_3.

v. En reprenant la question précédente, donner l'expression de A^{-n} en fonction de A et de I_3 pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

9. On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 7y_n + 3z_n \\ z_{n+1} &= 6x_n - 6y_n + 2z_n. \end{cases}$$

Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = A^n X_0$$

puis calcul de A^n guidé.