CH14 - Limites et équivalents

Table des matières

I Rappels

I. 1 Definitions et propriétés

Définition 1. Definition avec les ϵ

Proposition 2. Unicité de la limite

Proposition 3. Regles calculatoires. (somme et produits de limites)

Proposition 4. Si f est continue sur I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \ell \in I$ alors $\lim f(u_n) = f(\ell)$

Proposition 5. Si $u_n \leq v_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \ell$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \ell'$ alors

$$\ell \leq \ell'$$

— ⚠ inégalités larges.
— Utilisation classique : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à a

Proposition 6. Si $u_n \to \ell$ et $\ell > 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n > 0$

I. 2 Limites classiques

Proposition 7. Croissance comparée entre $\ln(n)^a, n^k, e^{an}, n!, n^n$

Proposition 8. Taux d'accroissement

— $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ — $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$
— $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ — $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

Proposition 9. Polynômes si $u_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k$ avec $a_p \neq 0$ et $v_n = \sum_{k=0}^{r} b_k n^k$ avec $b_r \neq 0$ Alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p}{b_r n^r}$$

I. 3 Theorémes d'existence

Théorème 10. Limite monotone

Théorème 11. Gendarmes

Théorème 12. Suites adjacentes

Théorème 13. Suite extraites u_{2n} et u_{2n+1}

II Equivalents

Définition 14. $u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

Proposition 15. Règle de calcul :
Seul le produit et le quotient fonctionnent.

⚠ pas de sommes.
⚠ ⚠ ⚠ Pas de composition. ⚠ ⚠ ⚠