DM vacances février

Exercice 1. Revoir les régles de calculs sur exp et ln[1] et leurs graphes et leurs limites...

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{e^x-1}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x}$

Exercice 3. Donner des équivalents simples de

1. Quand $x \to 1$ de $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$
2. Quand $x \to 0$ de $\frac{x\ln(x)}{e^x-1}$
3. Quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(k^2+k)$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 1+\frac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. Etudiez la fonction $f : x \mapsto 1+\frac{1}{x}$. (Domaine de définition, limites et variations)
3. Résoudre $f(x) = x$. On note α l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $u_1 < \alpha < 2$.
5. On note $I = [1, \alpha]$ et $J = [\alpha, 2]$. Montrer que $f(I) \subset J$ et $f(J) \subset I$.
6. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

   $$a_n = u_{2n} \quad b_n = u_{2n+1}.$$

   Enfin on note A la fonction définie pour tout x par $A(x) = f \circ f(x)$. Montrer que $a_{n+1} = A(a_n)$. On peut montrer de manière similaire que $b_{n+1} = A(b_n)$, on ne demande pas de le prouver.
7. Soit F une fonction réelle. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ alors $F(\mathcal{E}) \subset F(\mathcal{F})$. En déduire que I est stable par A. De même, on pourrait montrer que J est stable par A, on ne demande pas de le prouver.
8. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $A(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$
9. Résoudre $A(x) \geq x$ sur $]0, +\infty[$.
10. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, calculer leur limite.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
13. (a) Ecrire une fonction Python `u` qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n
    (b) Ecrire une fonction Python `limiteu` qui prend en paramètre un reel $\epsilon > 0$ et qui renvoie la valeur de du premier rang $n_0 \geq 0$ tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \epsilon$

1. $(\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$...)