Correction : DS5

Exercice 1. On condière un ensemble de personnes composé de n_1 hommes et de n_2 femmes. On désire élire un bureau de p représentants choisis parmi ces (n_1+n_2) personnes.

1. Combien y-a-t-il de bureaux possibles ?
2. Combien y-a-t-il de bureaux possibles contenant exactement k hommes.
3. En déduire la relation suivante : Pour tout $(n_1, n_2, p) \in \mathbb{N}^3$, tel que $p \leq n_1$ et $p \leq n_2$:

$$\binom{n_1+n_2}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{p-k}$$

Correction 1.

1. Il y a $\binom{n_1+n_2}{p}$ bureaux possibles (choix de p personnes sans ordre et sans répétition parmi les n_1+n_2 personnes)
2. On choisit les k hommes parmi les n_1 possibles et ensuite on choisit $(p-k)$ femmes parmi les n_2 possibles. Il y a donc

$$\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{p-k}$$

   possibilités.
3. Soit A l'ensemble des bureaux possibles. Soit A_k l'ensemble des bureaux possibles composés de k hommes. $(A_k)_{k\in[0,p]}$ est une partition de A et donc :

$$Card(A) = \sum_{k=0}^{p} Card(A_k)$$

   Ainsi

$$\binom{n_1+n_2}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{p-k}$$

Exercice 2. On considère l'équation suivante , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + z + 1 = 0 \qquad (E)$$

1. On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonciton définie par $f(t) = t^3 + t + 1$. A l'aide de l'étude de f, justifier que l'équation (E) possède une unique solution réelle, que l'on notera r. Montrer que $r \in]-1, \frac{-1}{2}[$.
2. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E) qu'on ne cherche pas à calculer. On sait alors que le polynôme $P(X) = X^3+X+1$ se factorise de la manière suivante :

$$P(X) = (X-r)(X-z_1)(X-z_2).$$

   En déduire que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$.
3. Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
   De même montrer que $1 < |z_1 z_2| < 2$.

4. Rappeler l'inégalité triangulaire. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{C}$
$$|x - y| \geq |x| - |y|$$
5. Montrer alors que
$$|z_1 + z_2| > |z_1| - \frac{2}{|z_1|}$$
6. Grâce à un raisonnement par l'absurde montrer que $|z_1| < 2$.
7. Conclure que toutes les solutions de (E) sont de modules strictement inférieures à 2.

Correction 2.

1. Comme $f(-1) = -1 < 0$ et $f(\frac{-1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, le théoréme des valeurs intermédiaires assure qu'il existe une solution a $f(t) = 0$ dans l'intervalle $]-1, \frac{-1}{2}[$. De plus $f'(t) = 2t^2 + 1$ donc $f' > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante et cette racine est unique.
2. En développant on obtient
$$P(X) = X^3 + (-r - z_1 - z_2)X^2 + \alpha X - z_1 z_2 r$$
On n'est pas obligé de calculer α. Par identification on obtient :
$$-r - z_1 - z_2 = 0 \quad \text{et} \quad z_1 z_2 r = -1$$
$$z_1 + z_2 = -r \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$$
$(r \neq 0)$
3. On a $\frac{1}{2} < -r < 1$ et $|z_1 + z_2| = |-r| = -r$. D'où
$$\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1.$$
On a $1 < \frac{-1}{r} < 2$ et $|z_1 z_2| = \left|\frac{-1}{r}\right| = \frac{-1}{r}$. D'où
$$1 < |z_1 z_2| < 2.$$
4. L'inégalité triangulaire 'inversée' donne
$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$
5. On a donc
$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$
Or $|z_1 z_2| < 2$, donc $|z_2| < \frac{2}{|z_1|}$ D'où $-|z_2| > -\frac{2}{|z_1|}$. On obtient donc l'inégalité voulue.
6. Supposons par l'absurde que $|z_1| \geq 2$. On a alors d'après la questions précédente
$$|z_1 - z_2| > 2 - 1 = 1$$
Ceci est en contradiction avec le résultat de la question 3. Donc
$$|z_1| \leq 2.$$

7. Le raisonement de la question 5 et 6 s'applique de façon similaire à z_2. Comme $|r| \leq 1$, toutes les racines de P sont bien de module strictement inférieur à 2.

Exercice 3. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}$ de représenation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x &= -3+t \\ y &= 1+2t \\ z &= 2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Pour tout ce problème on fixe un point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et on note $H(\lambda, \mu, \nu)$ son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.

1. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan contenant les points $B(-1,0,0), C(2,7,-3)$ et $D(-2,4,1)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_1$ a pour équation $x+z+1=0$
   (b) Montrer que $\mathcal{P}_1$ contient $\mathcal{D}$.
2. Soit $\mathcal{P}_2$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et le point $E(-2,3,-1)$.
   (a) Donner deux vecteurs parallèles à $\mathcal{P}_2$ qui ne sont pas colinéaires entre eux.
   (b) En déduire un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}_2$.
   (c) Montrer alors que $-2x+y-7=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$
3. Soit $\mathcal{P}_3$ le plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par A.
   (a) Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$. (En fonction évidemment de α, β, γ)
4. En déduire que les coordonnées de H vérifient un système linéaire qu'on peut écrire sous la forme :
$$M_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_2 \quad \text{où } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
   et $M_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne à déterminer (qui dépendra de (α, β, γ)
5. Montrer que M_1 est inversible et calculer son inverse.
6. En déduire que les coordonnées de H sont données par :
$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2 \quad \text{où } P_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
7. (a) Déterminer en fonction de α, β et γ la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ du point $M(x,y,z) \in \mathcal{D}$ telle que le veteur $\vec{AM}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{u} = (1,2,-1)$
   (b) Retrouver le résultat de la question 6 à l'aide de la valeur du paramétre t obtenue à la question précédente.

Correction 3.

1. (a) Soit $ax+by+cz+d=0$ l'équation du plan $\mathcal{P}_1$. On a
   — $B \in \mathcal{P}_1$ donc $-a+d=0$
   — $C \in \mathcal{P}_1$ donc $2a+7b-3c+d=0$

— $D \in \mathcal{P}_1$ donc $-2a+4b+c+d=0$

On obtient

$$\left\{\begin{array}{lll} -a+d & = & 0 \\ 7b-3c+3d & = & 0 \\ 4b+c-d & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} -a+d & = & 0 \\ c+4b-d & = & 0 \\ -3c+7b+3d & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} -a+d & = & 0 \\ c+4b-d & = & 0 \\ 19b & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} a & = & d \\ c & = & d \\ b & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient donc comme équation du plan $\mathcal{P}_1$

$$\boxed{x+z+1=0}$$

(b) Soit $M(x,y,z) \in D$, il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$x=-3+t, \quad y=1+2t \quad \text{et} \quad z=2-t$$

et donc

$$x+z+1=-3+t+2-t+1=0$$

Ainsi $M \in \mathcal{P}_1$

$$\boxed{D \subset \mathcal{P}_1}$$

2. (a) Le vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ de coordonnées $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ donc est parallèle à $\mathcal{P}_2$. Le point $F=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}$ donc à $\mathcal{P}_2$ et ainsi le vecteur $\vec{FE}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ est aussi parallèle à $\mathcal{P}_2$ et n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

(b) On cherche donc un vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{FE}=0$

On obtient les deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} a+2b-c & =0 \\ a+2b-3c & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a+2b & =0 \\ c & =0 \end{array}\right.$$

On peut ainsi prendre

$$\boxed{\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}}$$

(c) L'équation du plan $\mathcal{P}_2$ est donc de la forme

$$-2x+y+d=0$$

Comme $E \in cP_2$ on a $-2\times -2+3+d=0$ d'où $d=-7$

$$\boxed{\text{Le plan } \mathcal{P}_2 \text{ a pour équation } -2x+y-7=0}$$

3. (a) $\boxed{\text{Le vecteur } \vec{u} \text{ de } \mathcal{D} \text{ de coordonnées } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D}}$

   (b) L'équation du plan $\mathcal{P}_3$ est donc de la forme

$$x+2y-z+d=0$$

   Comme $A \in cP_3$ on a $\alpha+2\beta-\gamma+d=0$ d'où $d=-\alpha-2\beta+\gamma$

$$\boxed{\text{Le plan } \mathcal{P}_3 \text{ a pour équation } c+2y-z=\alpha+2\beta-\gamma}$$

4. Comme H est le projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ de A, on a $H \in \mathcal{D}$ donc en particulier à $H \in \mathcal{P}_1$ (d'après la question 1b) et à $H \in \mathcal{P}_2$ par définition de $\mathcal{P}_2$

   $H \in \mathcal{P}_3$ car $\mathcal{P}_3$ est orthogonal à $\mathcal{D}$ et passe par A et H est le projeté de A sur $\mathcal{D}$.

   Ainsi les coordonnées de H vérifient les équations cartésiennes des trois plans :

$$\begin{array}{ll} \lambda+\nu & =-1 \\ -2\lambda+mu & =7 \\ \lambda+2\mu-\nu & =\alpha+2\beta-\gamma \end{array}$$

   En mettant ce système sous forme d'équation matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ \alpha+2\beta-\gamma \end{pmatrix}$$

   Les coordonnées de H vérifient

$$\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ \alpha+2\beta-\gamma \end{pmatrix}}$$

   où M_1 est donné par l'énoncé.

5. Un pivot de Gauss long et laborieux montre que M_1 est inversible et

$$\boxed{M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

6. D'après la question 4 on a

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_1^{-1} M_2$$

   Et d'après la question 5 on a

$$M_1^{-1} M_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ \alpha+2\beta-\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1-14+\alpha+2\beta-\gamma \\ -2+14+2(\alpha+2\beta-\gamma) \\ -5+14-(\alpha+2\beta-\gamma) \end{pmatrix}$$

D'où

$$M_1^{-1}M_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -15+\alpha+2\beta-\gamma \\ 12+2(\alpha+2\beta-\gamma) \\ 9-(\alpha+2\beta-\gamma) \end{pmatrix}$$

Par ailleurs :

$$P_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}\alpha+2\beta-\gamma\\ 2\alpha+4\beta-2\gamma\\ -\alpha-2\beta+\gamma\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 3\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}\alpha+2\beta-\gamma\\ 2(\alpha+2\beta-\gamma)\\ -(\alpha-2\beta+\gamma)\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-15\\ 12\\ 9\end{pmatrix}$$

Donc

$$P_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-15+\alpha+2\beta-\gamma\\ 12+2(\alpha+2\beta-\gamma)\\ 9-(\alpha-2\beta+\gamma)\end{pmatrix} = M_1^{-1}M_2$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = P_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+P_2 = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-15+\alpha+2\beta-\gamma\\ 12+2(\alpha+2\beta-\gamma)\\ 9-(\alpha-2\beta+\gamma)\end{pmatrix}}$$

7. (a) Les coordonnées de $M \in \mathcal{D}$ vérifient $\begin{cases} x &= & -3+t \\ y &= & 1+2t \\ z &= & 2-t \end{cases}$

   Donc $\vec{AM}$ a pour coordonées : $\begin{pmatrix}-3+t-\alpha\\ 1+2t-\beta\\ 2-t-\gamma\end{pmatrix}$

   Ce vecteur est orthogona à $\vec{u}$ si et seulement si $u \cdot \vec{AM} = 0$ c'est-à-dire :

   $$-3+t-\alpha+2(1+2t-\beta)-1(2-t-\gamma)=0$$

   On obtient $6t = 3+\alpha+2\beta-\gamma$ donc

   $$\boxed{t = \tfrac{3+\alpha+2\beta-\gamma}{6}}$$

   (b) H a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix}-3+t\\ 1+2t\\ 2-t\end{pmatrix}$ avec le t prenant la valeur trouvé dans la question précédente, c'est-à-dire :

   $$\begin{pmatrix}-3+\frac{3+\alpha+2\beta-\gamma}{6}\\ 1+2\frac{3+\alpha+2\beta-\gamma}{6}\\ 2-\frac{3+\alpha+2\beta-\gamma}{6}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-18+3+\alpha+2\beta-\gamma\\ 6+2(3+\alpha+2\beta-\gamma)\\ 12-(3+\alpha+2\beta-\gamma)\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-15+\alpha+2\beta-\gamma\\ 12+2(\alpha+2\beta-\gamma)\\ 9-(\alpha+2\beta-\gamma)\end{pmatrix}$$

   On retrouve bien les coordonnées obtenues dans la question 6.

Exercice 4. 1. Combien y-a-t-il de codes possibles au MasterMind ?

2. Combien y-a-t-il de codes possibles au MasterMind avec exactement 1 rouge ?
3. Combien y-a-t-il de codes possibles au MasterMind avec au plus 1 rouge ?

4. Combien y-a-t-il de codes possibles au MasterMind où toutes les couleurs sont différentes ?

Correction 4.

1. Choix de 4 couleurs avec ordre avec répétition parmi 5 couleurs

$$\boxed{\text{Il y a } 5^4 \text{ codes possibles.}}$$

2. On choisit la place du pion rouge cela donne $\binom{4}{1} = 4$ choix. Puis on choisit 3 pions qui ne sont pas rouges (4^3 choix) et 1 pion rouge (1^1 choix)

$$\boxed{\text{Il y a } 4 \times 4^3 = 4^4 \text{ codes avec exactement 1 rouge}}$$

3. Les codes avec au plus 1 rouge sont les codes avec 0 ou 1 rouge. Il y a 4^4 choix avec 0 rouge et 4^4 choix avec 1 rouge.

$$\boxed{\text{Il y a } 2 \times 4^4 \text{ code avec au moins 1 rouge}}$$

4. C'est un choix avec ordre et cette fois sans répétition

$$\boxed{\text{Il y a } \frac{5!}{1!} = 5! \text{ codes possibles sans répétitions.}}$$

```python
from random import randint

couleur= ['J','R','M','B','V']
def code():
    L=[]
    for i in range(4):
        x=randint(0,4)
        L=L+[couleur[x]]
    return(L)

def place(code, couleur):
    L=[]
    n=len(code)
    for i in range(n):
        if code[i]==couleur:
            L=L+[i]
    return(L)

def compare_deux_couleur(L1,L2):
    N=0
    B=0
    for couleur in L2:
        if couleur in L1:
            N=N+1
    B=min(len(L1),len(L2)) -N
```

```
    return(B,N)

def couleur_distincte(code):
    L=[]
    for c in code:
        if c in L:
            L=L
        else:
            L=L+[c]
    return(L)

def decode(code, proposition):
    N=0
    B=0
    c_distincte=couleur_distincte(code)
    for c in c_distincte:
        L1= place(code, c)
        L2= place(proposition, c)
        Bc,Nc=compare_deux_couleur(L1,L2)
        B,N=B+Bc,N+Nc
    return(B,N)

def transform(S):
    L=[]
    for s in S:
        L=L+[s]
    return(L)

def master_mind():
    code_cherche=code()
    print(code_cherche)
    c=0
    proposition =[]
    while code_cherche !=proposition and c<12:
        prop= input('quel est le code ?')
        proposition = transform(prop)
        B,N= decode(code_cherche, proposition)
        print('Blanche : ', B, 'Noire :', N)
        c+=1

    if code_cherche==proposition:
        print('gagne')
    else:
        print('perdu')

master_mind()
```