Correction - TD 13 : Suites récurrentes

Suites usuelles

Correction 1.

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   - On montre par récurrence sur $n \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad u_n$ défini et $u_n > 1$.
   - Initialisation : pour $n = 3$:
     On a : $u_1 = -1$ puis $u_2 = -7$ et $u_3 = \dfrac{37}{5} > 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a
     $$u_{n+1} > 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} > 1 \;\Leftrightarrow\; 5u_n - 2 > u_n + 2 \;\Leftrightarrow\; u_n > 1.$$
     Ici on a utilisé le fait que $u_n > 1$ d'après $\mathcal{P}(n)$, et donc que $u_n + 2 > 0$. On arrive $u_n > 1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1} > 1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n \geq 3,\ u_n > 1$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0,\ u_1,\ u_2$ ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n \geq 3, u_n > 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n - 1 \neq 0$ et v_n bien défini.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:
   $$v_{n+1} \;=\; \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{5u_n - 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2}}{\frac{5u_n - 2 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{3u_n - 6}{4u_n - 4} = \frac{3}{4}\frac{u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{3}{4}v_n.$$
   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme 2.
4. On en déduit la formule explicite de v_n :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$
   En remarquant que : $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n - 2}{2(\frac{3}{4})^n - 1}.$$
5. Comme $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = 2$.

Suites récurrentes

Correction 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = 1 + u_n^2 - 2u_n = (1 - u_n)^2$.
2. On pose $v_n = 1 - u_n$. On a alors $v_{n+1} = v_n^2$. Essayons de calculer v_n : on a $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_0^4$, $v_3 = v_0^8$. On conjecture donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0^{2^n}$.
   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $\quad v_n = v_0^{2^n}$.

- Initialisation : pour $n = 0$:
  On a : $v_0^{2^0} = v_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a vu que : $v_{n+1} = v_n^2$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence et on obtient
  $$v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}.$$
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}.$$

On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - (1-u_0)^{2^n}$.

- Si $1 - u_0 > 1 \Leftrightarrow u_0 < 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $u_0 = 0$, alors $1 - u_0 = 1$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $-1 < 1 - u_0 < 1 \Leftrightarrow 0 < u_0 < 2$, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $u_0 = 2$, alors $1 - u_0 = -1$ et $(1-u_0)^{2^n} = 1$, et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $1 - u_0 < -1 \Leftrightarrow u_0 > 2$, alors $(1-u_0)^2 > 1$, et donc $\lim_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Correction 3.

1. **Étudions la suite $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par** $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n^2+1) \end{cases}$ **:**

   - **Étude des variations de la fonction $\mathbf{f : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2+1)}$ associée :**
     - ⋆ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
     - ⋆ la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = x$.
     - ⋆ On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0			$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	$+\infty$

     - ⋆ Montrons que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f. On a :
       - ◦ La fonction f est continue sur $[0,1]$.
       - ◦ La fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$.
       - ◦ $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 1$.

       Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f([0,1]) = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Et comme $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \subset [0,1]$, $\boxed{\text{l'intervalle } [0,1] \text{ est stable par } f.}$

- **Étude du signe de la fonction $\mathbf{g : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2+1) - x}$:**
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = \dfrac{x^2+1-2x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{2}$. Ainsi
  $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en } 1.}$
- **Calcul des limites éventuelles :**
  On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
  - ⋆ On a donc :
    - ∘ La suite converge vers l.
    - ∘ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en l.

    Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
  - ⋆ De plus on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
  - ⋆ On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient que : $l = f(l)/$
  - ⋆ On a donc : $l = f(l) \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = 1$.
    $\boxed{\text{La seule limite éventuelle est } 1.}$
- **Montrons que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$:**
  - ⋆ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété
    $$\mathcal{P}(n) : \ u_n \text{ existe et } u_n \in [0,1].$$
  - ⋆ Initialisation : pour $n = 0$:
    Par définition de la suite, on a bien que u_0 existe et $u_0 \in [0,1]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
    - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in [0,1]$. En particulier u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
    - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in [0,1]$. Or l'intervalle $[0,1]$ est stable par f. Donc $f(u_n) \in [0,1]$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0,1]$.

    Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
    $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1].}$
- **Étude de la monotonie de la suite :**
  Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$
- **Étude de la convergence de la suite :**
  - ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.
  - ⋆ Comme la seule limite éventuelle est 1, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$

2. **Que peut-on dire si on choisit maintenant $\mathbf{u_0 \in [-1,0]}$?**
   - Montrons que $u_1 \in [0,1]$:
     On a :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $[-1,0]$ comme fonction polynomiale.
     - ⋆ La fonction f est strictement décroissante sur $[-1,0]$.

⋆ $f(-1)=1$ et $f(0)=\dfrac{1}{2}$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f([-1,0])=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. Or on a supposé que $u_0\in[-1,0]$ donc $f(u_0)\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, à savoir $u_1\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. Comme $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\subset[0,1]$, on a en particulier que : $\boxed{u_1\in[0,1].}$

- La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ a donc un terme initial $u_1\in[0,1]$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ se comporte comme la suite de la question précédente et en particulier elle converge vers 1. Mais le comportement à l'infini d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge aussi vers } 1.}$

Correction 4.

1. **Étudier les variations de la fonction $f : x\mapsto \dfrac{3}{4}x^2-2x+3$ associée :**
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{3}{2}x-2$.
   - On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   - Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent avec le théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Étudier le signe de la fonction $g : x\mapsto f(x)-x=\dfrac{3}{4}x^2-3x+3$:**
   Le discriminant vaut $\Delta=0$ et l'unique racine est 2. Ainsi
   $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en } 2.}$

3. **Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l\in\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   ⋆ On a donc :
   - ∘ La suite converge vers l.
   - ∘ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en l.

   Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(l)$.

   ⋆ De plus on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$.

   ⋆ On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1}=f(u_n)$ et on obtient que : $l=f(l)/$

   ⋆ On a donc : $l=f(l)\Leftrightarrow g(l)=0\Leftrightarrow l=2$.
   $\boxed{\text{La seule limite éventuelle est } 2.}$

4. **On suppose que $u_0>2$:**
   (a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>2$:**
   On peut commencer par montrer que l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f. On a f strictement croissante sur $[2,+\infty[$, et $f(2)=2$. Donc pour tout $x\in[2,+\infty[$, $f(x)>2$ et l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f.
   On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n>2$.

- ⋆ Initialisation : pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 > 2$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 2$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f. Donc $f(u_n) > 2$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 2.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge ou elle diverge vers $+\infty$.
- ⋆ On suppose par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. On a alors :
  - ◦ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
  - ◦ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$.

  D'après le théorème de passage à la limite, on obtient donc que : $l \geq u_0$. Or par hypothèse, on sait que $u_0 > 2$. Ainsi on obtient que : $l > 2$. Absurde car la seule limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

5. **On suppose que $u_0 \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$:**

(a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \left]\frac{2}{3}, 2\right[$:**

On peut commencer par montrer que l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, 2\right[$ est stable par f. Attention, ici f n'est pas monotone sur $\left]\frac{2}{3}, 2\right[$, il faut donc traiter les deux intervalles $\left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$ et $\left]\frac{4}{3}, 2\right]$ séparemment.
Sur $\left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, f est strictement décroissante et $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, $f(x) \in \left]\frac{5}{3}, 2\right]$, donc $f(x) \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.
Sur $\left]\frac{4}{3}, 2\right]$, f est strictement croissante et $f(2) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \left]\frac{4}{3}, 2\right]$, $f(x) \in \left]\frac{5}{3}, 2\right]$, donc $f(x) \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.
En en déduit que pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$, on a bien $f(x) \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$: l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, 2\right[$ est stable par f.
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

- ⋆ Initialisation : pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
De plus, $u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$. Or l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, 2\right[$ est stable par f. Donc $f(u_n) \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.

⋆ Comme la seule limite éventuelle est 2, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 2.}}$

Correction 5.

1. **Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ associée :**
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2}{3}x - 1$.
   - On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0			$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

   - Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent avec le théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$:**
   Le discriminant vaut $\Delta = 0$ et l'unique racine est 3. Ainsi
   $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en 3.}}$

3. **Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

   ⋆ On a donc :
   - La suite converge vers l.
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en l.

   Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

   ⋆ De plus on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.

   ⋆ On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient que : $l = f(l)/$

- ⋆ On a donc : $l = f(l) \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = 3$.
  $\boxed{\text{La seule limite éventuelle est 3.}}$

4. **Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$ ou $u_0 = 0$? :**
   - Cas 1 : si $u_0 = 3$:
     Comme 3 est le point fixe de f, on a : $u_1 = f(u_0) = f(3) = 3$ puis $u_2 = f(u_1) = f(3) = 3$...
     On montre alors par récurrence que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante égale à 3 et donc qu'elle converge vers 3.}}$
   - Cas 2 : si $u_0 = 0$:
     On a par définition de la suite : $u_1 = f(u_0) = f(0) = 3$. Mais comme 3 est le point fixe de la fonction f, on a alors $u_2 = f(u_1) = f(3) = 3$ puis $u_3 = f(u_2) = f(3) = 3$... On montre alors par récurrence sur $n \geq 1$ que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire égale à 3 et donc qu'elle converge vers 3.}}$

5. **On suppose que $u_0 \in]0, 3[$.**
   (a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0, 3[$:**
   On peut commencer par montrer que l'intervalle $]0, 3[$ est stable par f. On traite ici les intervalles $\left]0, \frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2}, 3\right[$ séparemment.
   La fonction f est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{3}{2}\right]$, et $f(0) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Donc pour tout $x \in \left]0, \frac{3}{2}\right]$, $f(x) \in \left]\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right]$, donc $f(x) \in]0, 3[$.
   La fonction f est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}, 3\right[$, et $f(3) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Donc pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right[$, $f(x) \in \left[\frac{9}{4}, 3\right]$, donc $f(x) \in]0, 3[$.
   Ainsi, pour tout $x \in]0, 3[$, $f(x) \in]0, 3[$, et donc l'intervalle $]0, 3[$ est stable par f.
   On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in]0, 3[$.
   - ⋆ Initialisation : pour $n = 0$:
     Par définition de la suite, on a bien que u_0 existe et $u_0 \in]0, 3[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
     - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in]0, 3[$. En particulier u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
     - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in]0, 3[$. Or l'intervalle $]0, 3[$ est stable par f. Donc $f(u_n) \in]0, 3[$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in]0, 3[$.

     Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   - ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 3[.}$

   (b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

   (c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   - ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.
   - ⋆ Comme la seule limite éventuelle est 3, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 3.}}$

6. **On suppose que $u_0 > 3$.**

(a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 3$:**
On peut commencer par montrer que l'intervalle $]3, +\infty[$ est stable par f. On a f strictement croissante sur $]3, +\infty[$, et $f(3) = 3$, donc pour tout $x \in]3, +\infty[$, $f(x) > 3$ et l'intervalle $]3, +\infty[$ est stable par f.

- ⋆ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \; u_n \text{ existe et } u_n > 3.$$

- ⋆ Initialisation : pour $n = 0$:
Par définition de la suite, on a bien que u_0 existe et $u_0 > 3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - ◦ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 3$. En particulier u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
  - ◦ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 3$. Or l'intervalle $]3, +\infty[$ est stable par f. Donc $f(u_n) > 3$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 3$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 3.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge ou elle diverge vers $+\infty$.
- ⋆ On suppose par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. On a alors :
  - ◦ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
  - ◦ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$.

  D'après le théorème de passage à la limite, on obtient donc que : $l \geq u_0$. Or par hypothèse, on sait que $u_0 > 3$. Ainsi on obtient que : $l > 3$. Absurde car la seule limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

7. **On suppose que $u_0 < 0$.**

(a) **Montrer que $u_1 > 3$:**
On a :

- ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction polynomiale.
- ⋆ La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.
- ⋆ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 3$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f(]-\infty, 0[) =]3, +\infty[$. Or on a supposé que $u_0 \in]-\infty, 0[$ donc $f(u_0) \in]3, +\infty[$, à savoir $u_1 \in]3, +\infty[$. Donc on a bien $\boxed{u_1 > 3.}$

(b) **En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ a donc un terme initial $u_1 > 3$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ se comporte comme la suite de la question 5 et en particulier elle diverge vers $+\infty$. Mais le comportement à l'infini d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

Correction 6. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude. Ainsi la rédaction dans une copie doit être beaucoup plus détaillée qu'ici.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto \dfrac{(1+x)^2}{4}$
   La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1+x}{2}.$$
   On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$+$			
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant
   $$l = f(l) \Leftrightarrow l = 1.$$
   Ainsi, 1 est la seule limite éventuelle de la suite.
3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
   On remarque que $[0,1]$ est un intervalle stable par f et que $u_0 = 0 \in [0,1]$. Un raisonnement par récurrence permet alors de vérifier que la suite est bien définie et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1].$$
4. Étude de la monotonie de la suite :
   La fonction f est croissante sur $[0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien à valeurs dans $[0,1]$, ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Il suffit alors de comparer u_1 et u_0 et on obtient
   $$u_1 = \frac{1}{4} > u_0.$$
   Ainsi, un raisonnement par récurrence permet de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (voir les exemples du cours, le raisonnement par récurrence est obligatoire).
5. Étude de la convergence de la suite :
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi croissante et majorée par 1, elle converge donc vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ d'après le théorème sur les suites monotones. De plus, comme la seule limite éventuelle est 1, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Correction 7. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude. Ainsi la rédaction dans une copie doit être beaucoup plus détaillée qu'ici.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$
   La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant $l = f(l)$. Un calcul rapide montre qu'il n'y a pas de limite éventuelle.
3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
On remarque que $[0, +\infty[$ est un intervalle stable par f et que $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0, +\infty[$. Un raisonnement par récurrence permet alors de vérifier que la suite est bien définie et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0.$$
4. Étude de la monotonie de la suite :
La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien à valeurs dans $[0, +\infty[$, ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Il suffit alors de comparer u_1 et u_0 et on obtient
$$u_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} > u_0.$$
Ainsi, un raisonnemnt par récurrence permet de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (voir les exemples du cours, le raisonnement par récurrence est obligatoire).
5. Étude de la convergence de la suite :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle tend vers une limite finie ou $+\infty$. Comme il n'y a pas de limite éventuelle possible, on montre par un raisonnement rapide par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

Correction 8. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto e^x$
La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = e^x.$$
On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant $l = f(l)$. Étudions alors la fonction $g : \; x \mapsto g(x) = f(x) - x$. L'étude d'une telle fonction donne que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq 1.$$
En particulier, il n'y a pas de valeur d'annulation de g et donc il n'y a pas de limite éventuelle pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
$\mathbb{R}^+$ est un intervalle stable par f et $u_1 > 0$. Ainsi, on montre par récurrence que la suite est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n \geq 0$. (On ne commence pas au rang 0 car $u_0 \in \mathbb{R}$).
4. Étude de la monotonie de la suite :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 1 > 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Étude de la convergence de la suite :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle tend vers une limite finie ou $+\infty$. Comme il n'y a pas de limite éventuelle possible, par un raisonnement par l'absurde, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

Suites récurrentes doubles

Correction 9. **On définit deux suites $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par**

$$\mathbf{u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}}.$$

1. **On pose, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{w_n = v_n - u_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{w_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$w_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12}w_n.$$
Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = 11$. On en déduit donc l'expression explicite de w_n :
$$\boxed{\forall n \geq 1,\ w_n = w_1 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$
2. **Montrer que $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes :**
   - Étude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
   Soit $n \geq 1$, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2(v_n - u_n)}{3} = \frac{2}{3}w_n.$$
   Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \times 11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \geq 0.$$
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
   - Étude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
   Soit $n \geq 1$, on a :
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-1}{4}w_n.$$
   Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{-11}{4} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \leq 0.$$
   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

- Montrons que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$:
  On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n - u_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$.
  Comme : $-1 < \frac{1}{12} < 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Ainsi, on a donc montré que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent donc vers la même limite.}}$

3. **On pose pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{t_n = 3u_n + 8v_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{t_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$:**
   - Expression de t_n pour tout $n \geq 1$:
     Soit $n \geq 1$, on a : $t_{n+1} = 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$. Ainsi
     $\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est constante égale à } t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99.}$
   - Calcul de la valeur de la limite l :
     Comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 3u_n + 8v_n = 99$. De plus on a démontré à la question 2 que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers la même limite l et ainsi par propriété sur les produits et somme de limites, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 11l$. Par passage à la limite dans l'égalité : $3u_n + 8v_n = 99$, on obtient donc que
     $$11l = 99 \Leftrightarrow \boxed{l = 9.}$$

Correction 10. Soient $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\mathbf{a_0 = 0}$, $\mathbf{b_0 = 1}$ et pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$
$$\mathbf{a_{n+1} = -2a_n + b_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b_{n+1} = 3a_n}.$$

1. **Démontrer que la suite $(\mathbf{a_n + b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est constante :**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_n + b_n + 3a_n = a_n + b_n.$$
   Ainsi $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.}$
2. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{a_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$:**
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 1 - a_n$. Ainsi on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$a_{n+1} = -2a_n + b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 1 - 3a_n.$$
   On reconnaît une suite arithmético-géométrique .
   - Calcul de la limite éventuelle : on résout : $l = 1 - 3l \Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$.
   - Étude d'une suite auxiliaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = a_n - \frac{1}{4}$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
     $$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4} = 1 - 3a_n - \frac{1}{4} = -3\left(a_n - \frac{1}{4}\right) = -3v_n.$$
     Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$. On en déduit l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = -\frac{1}{4}(-3)^n$.

- Expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = v_n + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}(-3)^n + \dfrac{1}{4}$. On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).}$

3. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{b_n}$ en fonction de n :**

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+1} = 3a_n$, on a : $b_n = 3a_{n-1}$. Puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{3}{4}\left(1 - (-3)^{n-1}\right).}$