

TP : modélisation de l'aléatoire

Le but de ce TP est de simuler numériquement les exercices de probabilités que nous avons rencontré en mathématiques.

Exercice 1. Réel aléatoire entre a et b

- Écrire une fonction qui prend pour arguments deux réels a et b et qui renvoie un réel aléatoire entre a et b . **Remarque :** la fonction `uniform` du module `random` fait cette opération directement.
- On prend dans cette question $a = 5$ et $b = 10$.
 - Quelle est la probabilité que le nombre renvoyé soit entre 6 et 8?
 - Faire 100 tirages d'un réel aléatoire entre 5 et 10 et compter la proportion de cas pour lesquels la valeur est entre 6 et 8. Recommencer en faisant 1000, puis 10000 tirages. Vos résultats sont-ils en accord avec la question précédente?

Exercice 2. Entier aléatoire entre a et b

- Quelle fonction `python` simule une probabilité uniforme sur $[[a, b]]$?
- Écrire une fonction qui prend pour arguments deux entiers a et b et qui renvoie un nombre entier aléatoire entre a et b sans utiliser la fonction `randint`.
- On veut simuler le lancer d'un dé à 12 faces : on prend dans cette question $a = 1$ et $b = 12$.
 - Quelle est la probabilité que le nombre renvoyé soit un multiple de 3?
 - Faire 100 tirages d'un entier aléatoire entre 1 et 12 et compter la proportion de cas pour lesquels la valeur est un multiple de 3. Recommencer en faisant 1000, puis 10000 tirages. Vos résultats sont-ils en accord avec la question précédente?

Exercice 3. Pile ou Face On considère une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité p (avec $p \in [0, 1]$), et face avec probabilité $1 - p$. On lance la pièce, et on gagne 1 point si l'on obtient pile, 0 point si l'on obtient face.

- Écrire une fonction qui prend pour argument un réel $p \in [0, 1]$, et qui simule ce lancer de pièce, c'est-à-dire qui renvoie 1 avec probabilité p ou 0 avec probabilité $1 - p$. La fonction devra tester si p est bien dans $[0, 1]$ et afficher un message d'erreur dans le cas contraire.
- Simuler 10000 le lancer de pièce en prenant $p = \frac{1}{5}$ et compter la proportion de cas pour lesquels on obtient 1. Vos résultats sont-ils cohérents?

Exercice 4. Succession de Piles ou Faces On joue n fois au jeu de Pile ou Face avec une pièce dont la probabilité de faire pile vaut p , et on compte le nombre de fois où l'on a fait pile.

- Écrire une fonction qui prend pour arguments un entier naturel n non nul, et un réel $p \in [0, 1]$, et qui simule ce jeu.
- Pour $n = 3$, on veut simuler ce jeu d'une autre façon. Pour cela, on utilise le fait que la probabilité d'obtenir $k \in [0, 3]$ vaut $p_k = \binom{3}{k} p^k (1 - p)^{3-k}$. Écrire une fonction qui prend en argument un réel $p \in [0, 1]$ et qui simule le jeu de cette manière.
- Faire 10000 tirages du jeu de la question précédente pour $p = \frac{1}{4}$, et compter la proportion des cas où l'on a obtenu chaque valeur : 0, 1, 2, ou 3. Les résultats sont-ils cohérents?

Exercice 5. Anniversaire - simulation Créer un programme qui prend en argument un entier n correspondant aux nombres de personnes dans une classe et calcul une valeur approchée de la probabilité que deux personnes soient nées le même jour.

Créer un programme qui permet d'afficher un graphique dépendant du nombre de personnes dans une classe, la probabilité que deux personnes (au moins) est leur anniversaire en commun.

Exercice 6. Lancer de dés 1 On lance trois dés distincts et équilibrés. On note A l'événement « les numéros sont égaux », B : « au moins un des numéros est égal à 3 » et C : « la somme des numéros est égale à 4 ».

1. Créer une fonction python modélisant l'expérience et qui renvoie `True` si A est vérifiée et `False` sinon.
2. Créer une fonction python modélisant l'expérience et qui renvoie `True` si B est vérifiée et `False` sinon.
3. Créer une fonction python modélisant l'expérience et qui renvoie `True` si C est vérifiée et `False` sinon.
4. Créer une fonction python modélisant l'expérience et qui renvoie `True` si au moins l'un des événements est vérifiée et `False` sinon.
5. En répétant informatiquement un grand nombre de fois l'expérience, estimer la probabilité qu'au moins un des événements soient réalisés. Est-ce en accord avec la probabilité obtenue en TD ?

Exercice 7. Lancer de dés 2 En lançant 6 dés différents, donner les probabilités d'avoir :

1. Créer une fonction python modélisant l'expérience et qui renvoie `True` si on obtient les 6 résultats possibles et `False` sinon.
2. En répétant informatiquement un grand nombre de fois l'expérience, estimer la probabilité que cet événement soit réalisé. Est-ce en accord avec la probabilité obtenue en TD ?
3. Faire de même avec l'événement "au moins deux résultats distincts."

Exercice 8. Joueurs et jetons On dispose de $2n$ jetons numérotés de 1 à n dans un sac, chaque numéro apparaissant deux fois. A tire un jeton, le remet puis B tire un autre jeton.

Proposer un programme Python qui permet d'estimer la probabilité que A tire un numéro qui soit au moins le double du numéro de B.

Exercice 9. Abeille et fleur Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0, 1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille.

1. Ecrire un programme Python qui prend en argument un entier n et simule la fleur butinée par l'abeille les n premiers jours.
2. Ecrire un programme Python qui permet de compter combien de fois l'abeille est allée sur la fleur A entre les jours 100 et 200, en déduire une approximation de la probabilité que l'abeille aille sur la fleur A au jour n quand n est grand.