

TD 17 : DL

I Négligeabilité

Exercice 1. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \exp(x), f_3(x) = \frac{1}{x}, f_4(x) = 2, f_5(x) = \ln(x), f_6(x) = \sqrt{x} \ln x, f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 2. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en 0 :

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \exp(x^2) - 1, f_3(x) = \frac{1}{x}, f_4(x) = x\sqrt{x}, f_5(x) = \ln(x), f_6(x) = \sqrt{x} \ln x, f_7(x) = \ln(x+1).$$

Exercice 3. Soit f et g deux fonctions. Montrer que

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$$

Exercice 4. Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

II Calculs de développements limités

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :

1. $f(x) = e^x - \frac{1}{1-x}$ à l'ordre 2
2. $f(x) = \exp(\sin x)$ à l'ordre 4
3. $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2
4. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ à l'ordre 5
5. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1
6. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5
7. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2
8. $f(x) = \sin x - x \cos x$ à l'ordre 8
9. $f(x) = 2^x - 1$ à l'ordre 2
10. $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
11. $f(x) = \tan^2 x$ à l'ordre 6
12. $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4
13. $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3
14. $f(x) = \ln(1 + \cos(2x))$ à l'ordre 4
15. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3
16. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4
17. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{\tan x}\right)$ à l'ordre 4
18. $f(x) = (1 + \arctan x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3

Exercice 6. Déterminer le développement limité à l'ordre n donné de la fonction f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = \frac{1}{4}$ à l'ordre $n = 5$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 5$
3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 3$ à l'ordre $n = 4$
4. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre $n = 3$
5. $f(x) = x^{-\frac{1}{1+\ln x}}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 3$
6. $f(x) = e^{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre n quelconque.
7. $f(x) = \frac{x^n \ln x}{x^2 - 1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre 2

III Recherche de limites et d'équivalents

Exercice 7. Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point a et si oui les déterminer.

1. $x \mapsto \frac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ en $a = 0$
2. $x \mapsto \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ en $a = 0$
3. $x \mapsto \frac{\sin^2 x - x \ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ en $a = 0$
4. $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$ en $a = +\infty$
5. $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$ en $a = 0$
6. $x \mapsto \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ en $a = 1$
7. $x \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$ en $a = +\infty$
8. $x \mapsto (x^6 + x^2 + 1)^{\frac{1}{6}} - (x^4 + 1)^{\frac{1}{4}}$ en $a = +\infty$
9. $x \mapsto \left(\frac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a = +\infty$
10. $x \mapsto \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ en $a = 0$
11. $x \mapsto (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$ en $a = \frac{1}{2}$
12. $x \mapsto \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$ en $a = +\infty$
13. $x \mapsto x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $a = +\infty$
14. $x \mapsto \frac{\tan x - 1}{\sin(2x) - 1}$ en $a = \frac{\pi}{4}$
15. $x \mapsto x^{\frac{1}{1-x}}$ en $a = 1$
16. $x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}$ en $a = 1$

Exercice 8. Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de a :

1. $f(x) = \frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\ln(1+x)}$ au voisinage de $a = 0$
2. $f(x) = \sin(2x) - 2 \sin x$ au voisinage de $a = 0$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ au voisinage de $a = 0$
4. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{x}$ au voisinage de $a = +\infty$
5. $f(x) = (e+x)^e - e^{e+x}$ au voisinage de $a = 0$
6. $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)$ au voisinage de $a = 0$

IV Étude locale de fonctions

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu). On étudiera aussi la position locale de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu).

1. $f(x) = (x + 1) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

4. $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$

2. $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$

5. $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

3. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

6. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$

Exercice 10. Étudier la régularité de f , les variations de f , l'allure de \mathcal{C}_f au voisinage du point d'abscisse 0 et l'existence d'asymptotes pour \mathcal{C}_f pour f définie par :

1. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

2. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

3. $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (ne pas étudier les variations).

V Développement limité d'une fonction réciproque

Exercice 11. Soit la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan x + e^x - 1.$$

- Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
- Montrer que f induit une bijection de \mathbb{R} dans un intervalle I à préciser.
- Soit g la réciproque de la bijection précédente.
Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
En déduire que g admet, en tout point de I , des développements limités à tout ordre.
- En utilisant le fait que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 12. 1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^x + x - 1$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
2. Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ . Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f^{-1} .

VI Développement limité et régularité

Exercice 13. Soit la fonction f définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$.

- Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
- Ce prolongement est-il dérivable?
- Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
- Ce prolongement est-il dérivable?

Exercice 14. Soit a un paramètre réel. On définit la fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}}}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases} .$$

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
2. On suppose désormais que a est égal à la valeur trouvée à la question 1.
Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout x réel.

Exercice 15. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\cos x}{1+x+x^2}$. Calculer $f^{(4)}(0)$.