

# Correction TP Somme de riemann

[partie informatique à la fin]

## Exercice 9

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ .
  - On pose alors  $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$ . Cette fonction est bien continue sur  $[0, 1]$ . Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx.$$

Pour calculer l'intégrale, on utilise la méthode lorsque l'on a un polynôme de degré sur un polynôme de degré 2 qui est ici de discriminant strictement négatif et on obtient que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}.$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$ .
  - On pose alors  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ . Cette fonction est bien continue sur  $[0, 1]$ . Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}.$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $S_n = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ . On pose alors

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^3}}.$$

- On pose alors  $f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ . Cette fonction est bien continue sur  $[0, 1]$ . Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_0^1 f(x) dx.$$

Pour calculer l'intégrale, on reconnaît une primitive usuelle et ainsi on obtient que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1)$ .

- Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$ , on a par propriété sur le quotient de limite que :  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0}$ .

4. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .
- On pose alors  $f : x \mapsto x \sin(\pi x)$ . Cette fonction est bien continue sur  $[0, 1]$ . Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx.$$

Pour calculer l'intégrale, on utilise une IPP et on obtient que :  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\pi}}$ .

5. • On commence par transformer l'expression. Il faut donc transformer un produit en somme et ainsi une idée assez classique est de poser pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $t_n = \ln(w_n)$  : le passage au logarithme népérien permet de transformer un produit en somme.

On obtient alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $t_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n}\right) =$

$\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ . On fait alors un changement de variable pour se ramener à une somme de 1 à  $n$  qui va nous permettre ainsi d'appliquer le théorème de Riemann à la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . On pose ainsi  $j = k - n$  et on obtient que :

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln\left(\frac{j+n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

- On pose alors  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ . Cette fonction est bien continue sur  $[0, 1]$ . Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \int_0^1 f(x) dx = 2 \ln 2 - 1.$$

- Comme on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $t_n = \ln(w_n) \Leftrightarrow w_n = e^{t_n}$ , on obtient par propriété sur la composition de limite que :  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}}$ .

6. • On commence par transformer l'expression. Il faut donc transformer un produit en somme et ainsi une idée assez classique est de poser pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $T_n = \ln(S_n)$  : le passage au logarithme népérien permet de transformer un produit en somme.

On obtient alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $T_n = \frac{1}{2n} \ln\left(\prod_{k=1}^n (k+n)\right) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln(k+n) =$

$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln(n) = \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{2}$ . On pose alors

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{2}$  et on a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$T_n = \frac{\ln n}{2} + V_n$ . On peut alors appliquer le théorème de Riemann à la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

- On pose alors  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{2}$ . Cette fonction est bien continue sur  $[0, 1]$ . Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \int_0^1 f(x) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

en utilisant la primitive de la fonction logarithme népérien.

- Comme on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $T_n = \frac{\ln n}{2} + V_n$ , on obtient que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$  par propriété sur les sommes et composée de limites. Puis comme on a aussi que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $T_n = \ln(S_n) \Leftrightarrow S_n = e^{T_n}$ , on obtient par propriété sur la composée de limite que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty}$ .

```
# correction somme de riemann.py
```

```
01 | #Exercice 2
02 | def R(n,f):
03 |     Sr=0
04 |     for k in range(n):
05 |         Sr=Sr+f(k/n)
06 |     return(Sr/n)
07 |
08 | def f_test(x):
09 |     return(x**2+1)
10 |
11 | print(R(100,f_test))
12 |
13 | def S(n,f):
14 |     Ss=0
15 |     for k in range(1,n+1):
16 |         Ss=Ss+f(k/n)
17 |     return(Ss/n)
18 |
19 | print(S(100,f_test))
20 |
21 | #Exercice 5
22 | from math import floor, log
23 |
24 | def g(x):
25 |     return(1/(1+x))
26 | def approx(epsilon):
27 |     n=floor(1/epsilon)
28 |     return( R(n, g))
29 | print('valeur exacte', log(2))
30 | print('valeur approchée', approx(0.01))
31 |
32 |
33 | #Exercice 9
34 | def R2(n,a,b,f):
35 |     Sr=0
36 |     for k in range(n):
37 |         Sr=Sr+f(a+k*(b-a)/n)
38 |
39 |     return(Sr*(b-a)/n)
40 |
41 |
42 | def approx2(epsilon):
43 |     n=2*floor(1/epsilon)
44 |     return( R2(n,0,2, g))
45 | print('valeur exacte', log(3))
46 | print('valeur approchée', approx2(0.001))
```