

Programme de colle : Semaine 24

Lundi 11 Avril

I Espace vectorielle

1. Reconnaître un sev de \mathbb{R}^n .
2. Notion de combinaisons linéaires de vecteurs.
3. Ecriture cartésienne et vectorielle d'un sev de \mathbb{R}^n .
4. Famille libre, famille génératrice.

II Développements limités

1. Connaître les DL de $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{1+x}$ en 0
2. Savoir faire la somme, le produit, la composée et le quotient de deux DLs. (Bref savoir calculer des DL)
3. Calculer des limites et des équivalents grâce aux DL.
4. Changement de variable, savoir se ramener en 0 pour calculer un DL en un autre point.
5. Développement asymptotique.

III Informatiques

Les programmes seront écrits en Python.

1. Manipulation des listes.
2. Recherche de maximum d'une liste.
3. Tri à bulle et tri par insertion.
4. Bibliothèque matplotlib.pyplot et numpy.
5. Tracer de fonction.
6. Somme de Riemann, calcul de limites et approximations des intégrales.
7. Modéliser une expérience aléatoire à l'aide de la bibliothèque random.

IV Exercices Types

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?
 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 0\}$
 - $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 3y + 1 = 0\}$
 - $C = \{(x + 2y, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
 - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. Trouver une famille génératrice des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}.$$

Trouver une famille génératrice de $F \cap G$.

3. Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.
 - $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.
 - $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 4, 1, 1)$ et $v = (-1, 2, 2, 1)$.
 - $E = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

4. Les familles suivantes de \mathbb{R}^3 sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.
 - $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
 - $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.
 - $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
 - $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$
5. $f(x) = \exp(\sin x)$ à l'ordre 4
6. $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2
7. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ à l'ordre 5
Calculer les DL suivants
8. $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = \frac{1}{4}$ à l'ordre $n = 5$
9. $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 5$
10. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 3$ à l'ordre $n = 4$
11. Modéliser le lancer d'un dé. De 100 lancers de dé. De lancers de dés jusqu'à obtenir un 6...
12. Modéliser le tirage d'une boule dans une urne contenant 3 rouges et 5 noires.
13. Ecrire une fonction qui prend en argument une liste et la trie.
14. Ecrire une fonction qui prend en argument une liste et une variable a et retourne le nombre de fois où a appartient à la liste.
15. Tracer la fonction $f(x) = x^3 + 3x + 1$ entre -1 et 1 à l'aide de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
Calculer les DL suivants en 0