DS 8 - Concours Blanc

Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. 1. Enoncer le théorème des accroissements finis avec ses hypothéses.

2. A l'aide de ce théorème prouver que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

3. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, déduire des deux inégalités précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+1) < S_n < \ln(n) + 1$$

4. En déduire un équivalent de $(S_n)_{n \geq 1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2y - 2z, -2x + 4y - 2z, -2x + 2y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $u_1 \in \mathbb{R}^3$ et $u_2 \in \mathbb{R}^3$, montrer que

$$g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 g(u_1) + \lambda g(u_2)$$

(On dit alors que g est linéaire)

2. Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$. Calculer $g(u), g(v)$ et $g(w)$ et les exprimer en fonction de u, v et w.
3. Soit $E_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$. Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
4. On note Id_3 la fonction identité de $\mathbb{R}^3$, à savoir,

$$\mathrm{Id}_3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$$

Soit $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (g - 2\,\mathrm{Id}_3)(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$. On admet que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. En donner une base.

5. Montrer que $E_0 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$. [1]
6. On note toujours $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Soit $A = (1, -1, -3)$. Donner les coordonées de A dans la base (u, v, w). [2]
8. A l'aide de la question précédente et de la question 1, montrer que

$$g(A) = 2(v - 3w)$$

9. On note $g^2 = g \circ g$. Montrer que $g^2(A) = 4(v - 3w)$. [3]
10. On note $g^n = g \circ g \cdots \circ g$ où l'on a composé n fois. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer $g^n(A)$ en fonction de n, v et w.

1. Cette question peut se répondre avec ou sans sytème...
2. Autrement dit, exprimer A en fonction de (u, v, w)
3. On pourra utiliser les questions 1 et 8

Exercice 3. Une puce se déplace le long d'un axe. Au temps $n = 0$ la puce est en 0. Puis à chaque saut elle monte de 1 avec probabilité 1/2 et descend de 1 avec probabilité 1/2.

On s'intérresse à la probabilité que la puce revienne à l'origine. On note A_n l'événement

$$A_n = \text{ 'La puce est en 0 au saut } n\text{'}$$

1. Quelle est la probabilité de l'événement A_1 ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement A_2 ?
3. Soit E_n l'événement 'la puce est sur un nombre pair au rang n'. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(E_{2n+1}) = 0$ et $P(E_{2n}) = 1$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $P(A_{2n+1})$
4. On fixe un nombre entier pair que l'on note $2n$. Soit M_k l'événement 'la puce est montée k fois durant les $2n$ sauts' et D_k l'événement 'la puce est descendue k fois durant les $2n$ sauts'.
   (a) Calculer $P(M_k)$ en fonction de k er n.
   (b) Exprimer l'événement A_{2n} à l'aide des événements M_n et D_n.
   (c) En déduire la valeur de $P(A_{2n})$ en fonction de n.
5. On considère le programme suivant censé modéliser la position de la puce après n sauts :

```
def sauts(n):
    puce=0
    for i in range(n):
        p=random()
        if    :
            puce=puce+1
        else:
            puce=
    return(puce)
```

   Recopier et compléter sur votre copie le programme précedent pour qu'il fonctionne.
6. Ecrire une fonction python `A` qui prend en argument le nombre de sauts n et retourne `True` si la puce est en 0 au temps n et `False` sinon.
7. Ecrire une fonction Python qui permet de donner une valeur approchée de $P(A_{2n})$ en itérant un grand nombre de fois l'expérience. (A l'aide de la fonction `A` et sans utiliser la formule obtenue en 5c)
8. Ecrire une fonction Python qui permet de modéliser les sauts de puce jusqu'à la première fois où la puce revient en 0 et retourne le nombre de sauts effectués.

Exercice 4. Soit $a \in]-1, 1[$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

1. Calcul des dérivées successives de f.
   (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.
   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n la valeur de $f^{(n)}(0)$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a :

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

On pourra faire une récurrence et utiliser une intégration par parties

3. Soit A un nombre réel strictement positif.

   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que :

   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M$$

   et en déduire que pour tout nombre entier naturel n, on a :

   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

   .

   (b) Soit x un nombre réel apartenant à $[-A, A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (c) En déduire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-A, A]$

   (d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?